6. チューリングマシンの符号化と計算不可能性

1

6－1. TMの符号化

これまで、チューリングマシンで様々な“計算”が行える
ことを見てきた。ここでは、チューリングマシンは、一種の
“数”であることをみていく。

$T=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$ TMの数学的定義

$\langle T\rangle = 11110\cdots0110\cdots01\in\{0,1\}^*$ TMの符号化

2

アイディア

1:を区切り記号をして用いる。

0:を一進数の“数”として用いる。

一進数

一種類の記号で数を表す。

10進数	一進数
1	0
2	00
3	000
4	0000
5	00000
n	0^n

3

状態の符号化

状態を符号化する。
ここで、状態の名前は重要ではなく、
状態の数だけが重要である。

$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_l\}$

$\cdots10^l1\cdots$

両脇の1は、
（アルファベット等）
他の集合との境目
を意味する。

4

アルファベットの符号化

アルファベットを符号化する。
ここでも、記号の名前は重要ではなく、
記号の数だけが重要である。

入力アルファベット

$\Sigma=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ ⟺ $\cdots10^m1\cdots$

テープアルファベット

$\Gamma=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1},\cdots,a_n\}$ ⟺ $\cdots10^n1\cdots$

前半は入力
アルファベットを
表す。

5

受理状態の符号化

受理状態の集合を符号化する。
ここでは、状態の添え字の集合に注目して、
符号化する。

受理状態集合

$$F=\{q_{i_1},q_{i_2},\cdots,q_{i_k}\}$$

$$\cdots110^{i_1}110^{i_2}11\cdots110^{i_k}11\cdots$$

6

初期状態と空白記号の符号化

初期状態は、常に、

$q_1 \in Q$

であるとすれば、符号化の必要がない。

空白記号は、常に、

$B = a_n \in \Gamma$

であるとすれば、符号化の必要がない。

7

状態遷移関数の符号化

状態遷移関数を符号化する。

ヘッドの移動方向を次のように符号化する。

$R = 0$

$L = 00$

これにより、一つの状態遷移関数を次のように符号化する。

$\delta(q_{j_1}, a_{j_2}) = (q_{j_3}, a_{j_4}, 0^{j_5})$

$\Updownarrow$

$c = 0^{j_1}10^{j_2}10^{j_3}10^{j_4}10^{j_5}$

空集合以外の状態遷移関数を符号化する。

$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_h\}$

$\Updownarrow$

$\cdots 11c_1 11c_2 11 \cdots 11c_h 11 \cdots$

8

これらをまとめて、

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$

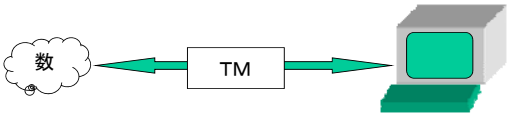
$\Updownarrow$

$\langle T \rangle =$

$11110^l110^m110^n1110^{i_1}110^{i_2}11\cdots110^{i_k}111c_1 11c_2 11\cdots 11c_h 111$

$\in \{0,1\}^*$

このように、TMは数とみなせる。
また、TMは　$\{0,1\}^*$ 上の文字列
ともみなせる。



9

入力テープの符号化

入力記号列も、次のように符号化できる。

$x = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p}$

$\Updownarrow$

$\langle x \rangle = 10^{i_1}10^{i_2}\cdots 10^{i_p} \in \{0,1\}^*$

10

6－2. 万能チューリングマシン

符号化によって、どのようなTMも、$\{0,1\}^*$の文字列で表現できることがわかった。
また、入力記号列も、$\{0,1\}^*$の文字列で表現できることもわかった。
このように符号化されているTM　Tを入力として、
Tの動作をシミュレートするTM　Uを設計することができる。
つまり、任意のTM　Tと入力 x の組に対して、
その符号が与えられたときに、Tの動作をシミュレートするTMを万能TMという。

11

万能TM

次のような、5テープTM　UでどんなTM　Tの動作でもシミュレートすることができる。

$\langle T, x \rangle = \langle T \rangle \circ \langle x \rangle$	Uへの入力
$100\cdots01001\cdots$ ↑	Tのテープ
$11001000100001001011\cdots$	Tの状態遷移関数 δ
0000	Tの状態
0000100000	ワークテープ

このように、他の任意のTMをシミュレートするTMを
万能TM（Universal Turing Machine、UTM）という。

12

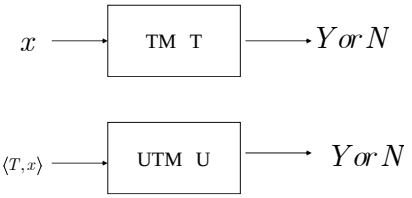
UTMの動作

(i)UはTの現在の状態が受理状態かチェックする。
（状態テープの内容が、符号化の一部と同じか
チェックする。）
(ii)状態テープの内容をワークテープにコピーし、
Tのヘッド位置の記号を1に続けてコピーする。
このとき、状態遷移関数　の前半部の書式になる。
(iii)ワークテープの内容と一致する状態遷移関数を
入力テープから検索する。(見つからない場合は、
非受理とする。)
(iv) が見つかったら後半部にしたがって、第2テープ、
第4テープ内容を更新する。(シフト動作が必要となるが、
実現可能である。)

13

TMとUTM

ここでは、TMやUTMを一種のブラックボックスをみなす。



14

6－3. TMの限界（計算の限界）

TMは、現在のコンピュータが実行できるものは、
すべて実行することができる。
コンピュータによって、実現されている様々なソフトウェア
を考えると、TMで何でも計算可能のように思えてしまう。
しかし、TMで受理できない言語が存在する。
これは、コンピュータには、原理的に限界があることを示している。

15

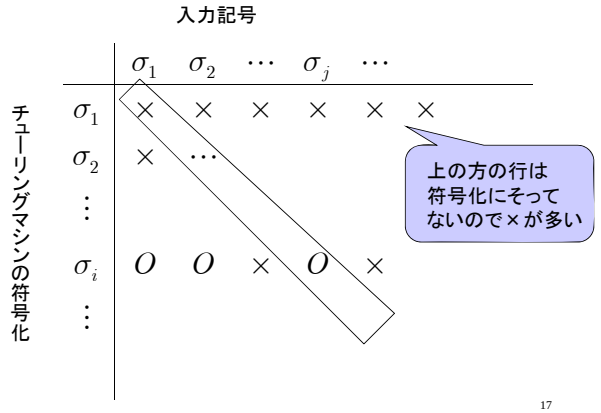
計算の表

TMは、$\{0,1\}^*$の文字列であり、
入力も、$\{0,1\}^*$の文字列である。
いま、$\{0,1\}^*$の文字列すべてを次のように並べることができる。

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 00, \sigma_4 = 01, \cdots, \sigma_\infty$$

ここで、σ_i を縦横に配置して2次元の表をつくる。
(i,j) 成分は、TM $\sigma_i = \langle T \rangle$ が入力 $\sigma_j = \langle x \rangle$ を
受理するときに○、その他は×とする。
(なお、σ_i がTMの符号化にそっていなければ×とする。)
このようにして、2次元の表を構成することができる。

16



17

TMで認識不可能な言語

計算の表に基づいて次のような言語を構成できる。

$$L_{\overline{TM}} = \{\sigma_i \mid TM\sigma_i = \langle T\rangle \text{が} \sigma_i = \langle x\rangle \text{を受理しない。}\}$$

この言語は、計算の表において、
対角成分が×となるような σ_i すべてからなる。

このとき、次の命題が成り立つ。

言語 $L_{\overline{TM}}$ はいかなるTMによっても認識されない。

18

証明(対角線論法)

$L_{\overline{TM}}$を認識するTM　Tが存在するとする。(背理法の仮定。)
Tの符号化したものを　σ_T とする。すなわち、$\sigma_T =< T >$ 。
計算の表より、
(σ_T, σ_T)
の要素は○か×である。

場合1:○のとき
このときは、
$\sigma_T =< T >$ は列 $\sigma_T =< x >$ を受理するので、$L_{\overline{TM}}$ には含まれない。しかし、Tは受理しており矛盾である。
場合2:×のとき
今度は、σ_T が $L_{\overline{TM}}$ に入るのにTは受理しない。
よって、こちらも矛盾である。

以上より、$L_{\overline{TM}}$ を認識する　TM　は存在しない。　QED 19

TMにおける停止能力

必ず停止するTMでは認識できないが、
そのような制限のないTMでなら認識できる　$\{0,1\}$ 上の言語　$L_{\overline{halt}}$　が存在する。

証明

$L_{\overline{halt}} = \{\sigma_i \mid TM\sigma_i = \langle T \rangle$は、列$\sigma_i$に対して停止して受理しない。$\}$
とする。このとき、$L_{\overline{halt}}$　が命題の言語であることを示す。

20

この言語は、必ず停止する言語では認識できない。
背理法(対角線論法)により証明する。
必ず停止するTM　Tが存在すると仮定する。(背理法の仮定)
このとき、符号化によって、$\sigma_T = \langle T \rangle$を得る。
このとき、列　σ_T　を入力しても停止する。
すると、前の議論と同様にして、Tが　σ_T を受理しても、
受理しなくても矛盾が生じる。

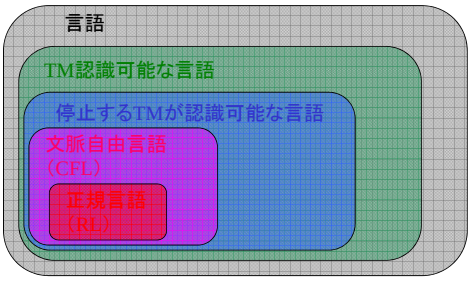
一方、必ず停止するという条件をはずすと、次のように
簡単に認識可能。
Tの列 σ_T に対する動作をシミュレートして、
非受理状態で停止したときのみ受理をする。

以上より、必ず停止するTMは、TMより能力が小さい。

QED 21

言語間の関係

言語には、TM認識不可能なもの、TM認識可能なもの、
文脈自由文法、正規言語がある。
これらは、真の包含関係を形成する。



22

6－4.言語と問題

問題(クラス)と問題例(インスタンス)

ここで、計算機で解く問題について再考する。
問題といった場合に、次のような3つのタイプが考えられる。
素因数分解についての「問題」
(1)781167は合成数かどうか判定せよ。
(2)整数nが与えられたとき、それが合成数かどうか判定せよ。
(3)整数nの素因数をすべてもとめよ。

問題のインスタンス

インスタンスの集合(クラス)

列挙の問題といいます。

23

判定問題

ここからは、(2)のタイプの問題を扱いたい。
(2)のように{yes,no}で答えられる問題を
「判定問題」(decision problem)といいます。

判定問題を記述する際には、
1.問題の名称、
2. 問題例の集合、
3.yesとなるべき条件
の3つを記述する必要がある。
これらの記述によって、初めて問題が定義される。

ここで、2, 3は簡単に、
2'インスタンス(の代表)
3'質問
に置き換えることもある。

24

判定問題の例

名称：合成数の問題
インスタンス：整数n
問：nは合成数か？

名称：最大値の問題
インスタンス：実数の集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ と
添え字 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$
問： a_i は S の最大値か？

25

言語と問題

判定問題は、yesとなるインスタンスの集合を言語とみなせば、一意に表現可能である。

名称：合成数の問題
インスタンス：整数n
問：nは合成数か？

このように、問題は言語に読み替え可能。問題を解くとは、対応する言語を認識するTMを作ること。

$$L_Y=\{c\in N\mid c\text{は合成数}\}$$
$$=\{4,6,8,9,10\cdots\}$$

26

6－5．停止性問題

次のような問題を考える。

名称：TMの停止性問題
インスタンス：$\langle T,\sigma\rangle$
問：TM　Tは　σ　に大して、停止するか？

この問題は、無限ループの自動判別等に利用可能で、大変有用であるが、計算不可能である。
つまり、自動無限ループ判定ソフトは原理的に、実現不可能である。

27

定理
TMの停止性問題は非可解である。（計算不可能である。）

証明

$L_{\overline{halt}}=\{\sigma_i\mid TM\sigma_i=\langle T\rangle\text{は、列}\sigma_i\text{に対して停止して受理しない。}\}$

は、前にみてきたように停止保証TMでは認識できない。

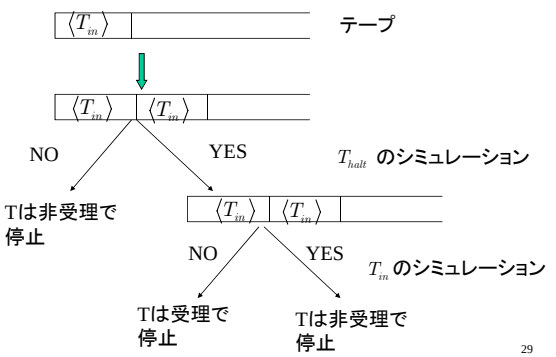
この言語を利用して、命題を背理法によって示す。

TMの停止性問題を解くTM　T_{halt}　が存在すると仮定する。
（背理法の仮定）

T_{halt}　をUTMの構成の要領でシミュレートすることができる。
このことを利用してTを構成する。

28

入力 $\langle T_{in}\rangle$ に大して、コピーを作り文字列 $\langle T_{in}\rangle\langle T_{in}\rangle$　を構成する。



29

もし、 $\langle T_{in},T_{in}\rangle$　が必ず停止することがあらかじめ判別できれば、
$\langle T_{in}\rangle$　をシミュレートすることによって、
$L_{\overline{halt}}$　の言語を認識できるTM　Tが構成できる。
しかも、Tは必ず停止する。
これは、 $L_{\overline{halt}}$　を認識する停止保証TMが存在しないことと矛盾する。

以上より、もし停止性判定問題を解くTM　T　は存在しない。

QED

30

6−6. 停止性問題の別証明

一般のプログラムの停止を判定するような、
プログラムは存在しない。

証明

プログラムPとPへの入力Dを引数とするような次のような
プログラムが存在するとする。

halttester1(Program P,Data D);

入力:プログラムPと、そのプログラムへのデータD
出力:PへDを入力したときに、
停止するなら yes
停止しないなら no
を出力する。(必ず停止する)

31

DataのDとしては、どのようなデータでもかまわないはずである。
よって、Dとしてプログラム自身を常にとるような関数を
構成できる。

halttester2(Program P);

入力:プログラムP
出力:PへPを入力したときに、
停止するなら yes
停止しないなら no
を出力する。(必ず停止する)
つまり、halttester1(P,P)と同様の動作をする。

これは、halttester1(P,D)が存在すれば、容易に構成できる。
(単に、機能を限定させているだけである。)

32

次に、halttester2(P)を元に、次のような関数を構成する。

funny1(Program P);

入力:プログラムP
出力:halttester2(P)がyesなら、無限ループ
halttester2(P)がnoなら、停止

具体的には、次のような関数を構成すれば良い。

```
funny1(Program P){
    if(halttester2(P){
        for(;;);
        }
    else{
        printf("HALT¥n");
        }
}
```

33

このとき、プログラムfunny1()に、
引数として、funny1()を与えたときの動作を考える。

すなわち、funny1(funny1);が停止するかどうかを考える。

場合1:
haltester2(funny1)がyesと出力する場合、
このときは、
funny1()の作り方から明らかに停止しない。
これは、funny1が停止すると判断していることと矛盾する。

場合2:
haltester2(funny1)がnoと出力する場合、
このときは、
funny1()の作り方から停止する。。
これは、funny1が停止しないと判断していることと矛盾する。

このようにいずれの場合も矛盾が生じる。

QED

34