

## 5. チューリングマシンと計算

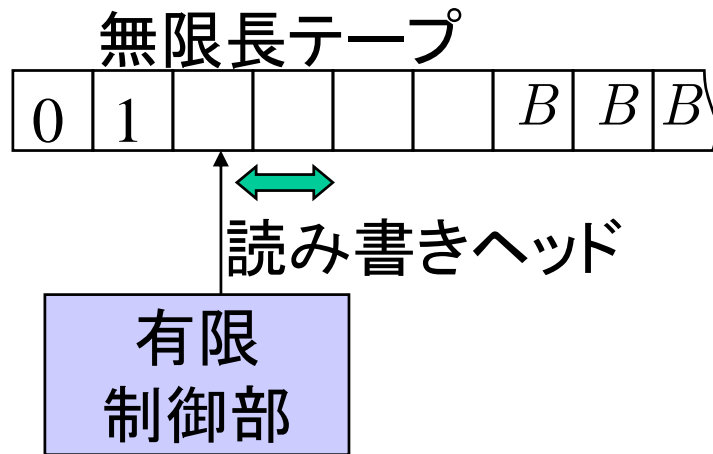
## 5-1. チューリングマシンとその計算

これまでのモデルでは、  
テープに直接書き込むことができなかった。  
また、入力テープヘッドの操作は右方向だけしか  
移動できなかった。  
これらの制限を取り除いた機械を考える。  
このような機械を**チューリングマシン**(Turing Machine, TM)  
と呼ぶ。(実は、TMは、現実のコンピュータの能力を持つ。)

TMの特徴(DFAとの比較)

- 無限長テープを持つ。
- 書き込み可能ヘッドを持つ。
- ヘッドは左右に移動可能。

# TMの概略



TMを定める要素

テープ

入力記号

テープ記号

空白記号

有限制御部

内部状態

初期状態

状態変化

受理かどうかの判断

# TMの数学的定義

TMは、 $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$  の7項組で与えられる。  
ここで、

1.  $Q$  は有限集合で、**状態**を表す。
2.  $\Sigma$  は有限集合で、**入力アルファベット**を表す。
3.  $\Gamma$  は有限集合で、**テープアルファベット**を表す。
4.  $\delta$ は  $Q \times \Gamma$  から  $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$  への写像  
( $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ ) で、  
**状態遷移**を表す。 $\delta$  を**状態遷移関数**という。
5.  $q_0 \in Q$  は、**初期状態**を表す。
6.  $B \in \Gamma$  は**空白記号**を表す。
5.  $F \subseteq Q$  は**受理状態**の集合を表す。

ここで、 $\Sigma \subseteq \Gamma$ ,  $B \notin \Sigma$  である。

# TMの図式表現(状態遷移図)

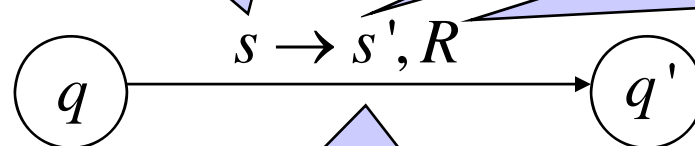
TMは、状態遷移図で表現できる。

$\delta(q, s) = (q', s', R)$  のとき、

読み込み記号

セルへの書き込み  
ヘッド位置のテープ記号を  
書き換える。

ヘッドの移動方向  
右方向に移動



状態の変化

# TMの様相

TMでは、複数の対象が同時に変更される。

すなわち、一回の遷移で、

○状態

○テープ内容、

○ヘッド位置

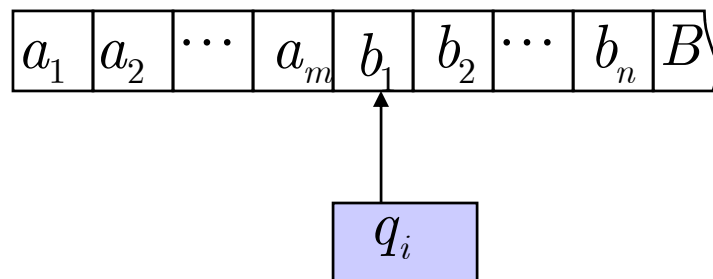
の3つが同時に変化する。

これらの3つによって**TMの様相**が定義される。

また、下のようなTMの様相は、

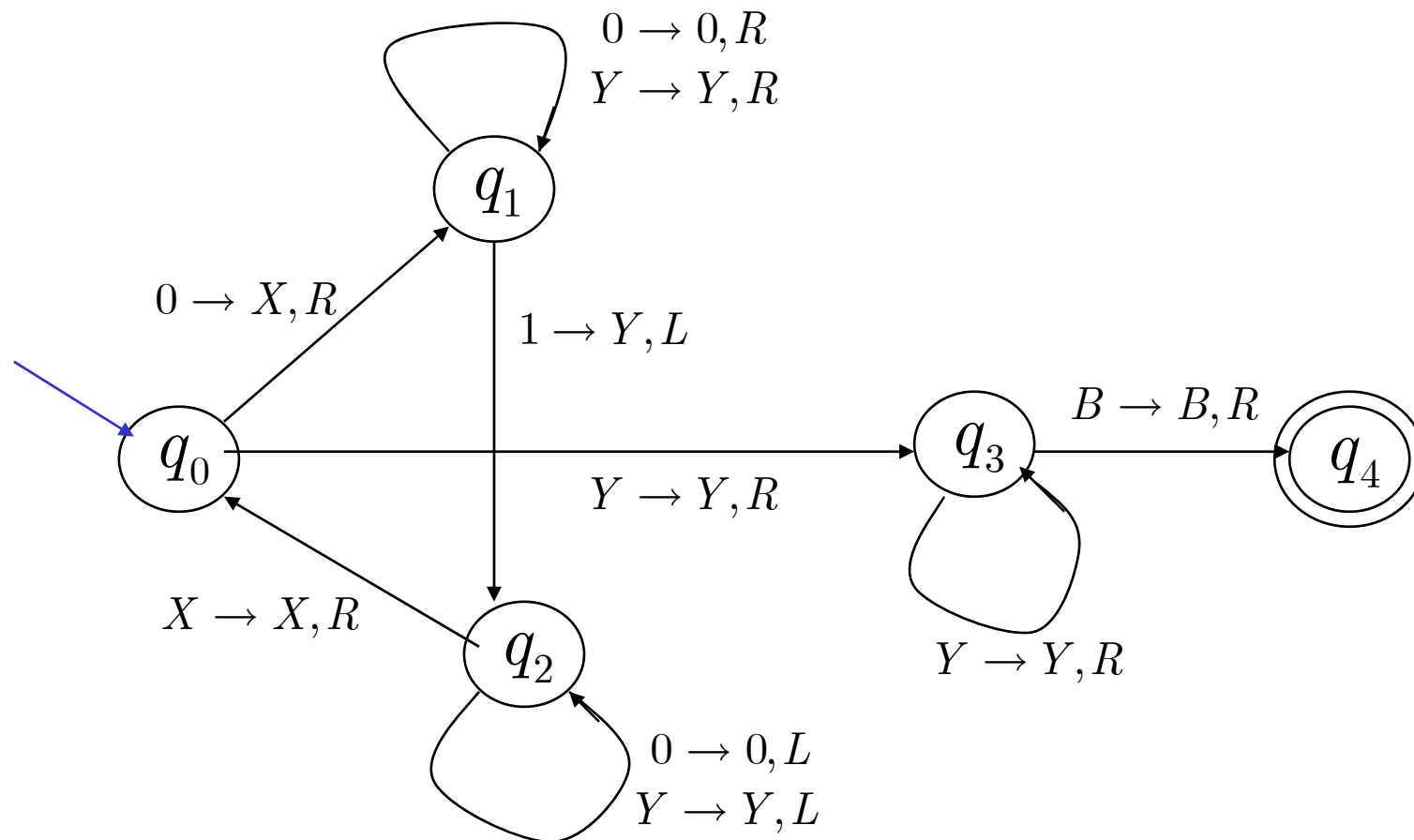
$$a_1 a_2 \cdots a_m q_i b_1 b_2 \cdots b_n$$

と記述できる。



# TMの状態遷移図例

言語  $L_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$  を受理するTM  $T_1$  を示す。



# TMの形式的定義例

$$T_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, X, Y, B\}$$

$$F = \{q_4\}$$

$\delta$	0	1	$X$	$Y$	$B$
$q_0$	$(q_1, X, R)$			$(q_3, X, R)$	
$q_1$	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, Y, L)$		$(q_1, Y, R)$	
$q_2$	$(q_2, 0, L)$		$(q_0, X, R)$	$(q_2, Y, L)$	
$q_3$				$(q_3, Y, R)$	$(q_4, B, R)$
$q_4$					



## TMの計算例

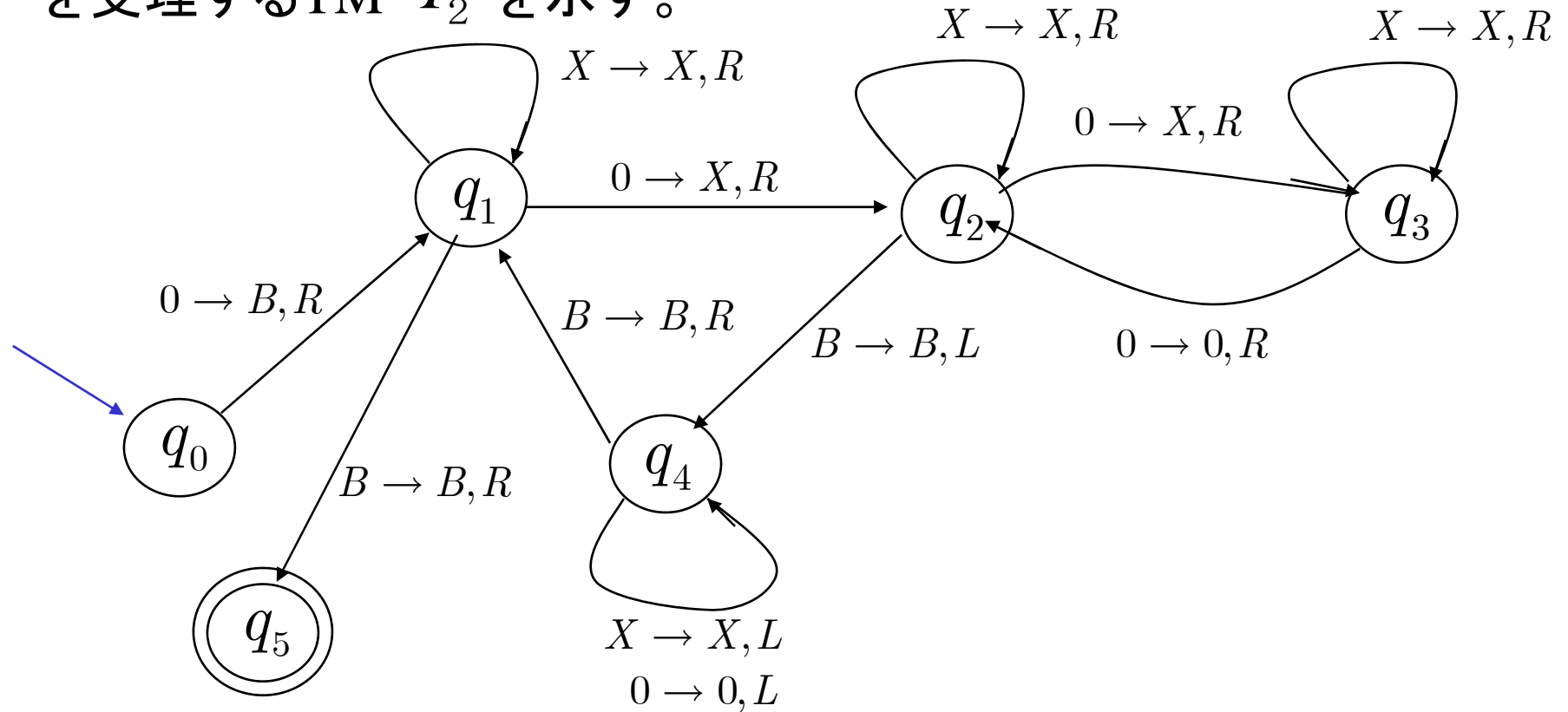
ここでは、TM  $T_1$  が0011を受理する計算を示す。  
なお、TMの計算は、TMの様相の列として表される。

$$\begin{aligned} q_0 0011 &\Rightarrow Xq_1 011 \Rightarrow X0q_1 11 \Rightarrow Xq_2 0Y1 \\ \Rightarrow q_2 X0Y1 &\Rightarrow Xq_0 0Y1 \Rightarrow XXq_1 Y1 \Rightarrow XXYq_1 1 \\ \Rightarrow XXq_2 YY &\Rightarrow Xq_2 XY Y \Rightarrow XXq_0 YY \Rightarrow XXYq_3 Y \\ \Rightarrow XXYYq_3 &\Rightarrow XXYYBq_4 \end{aligned}$$

## TMの例2

言語  $L_2 = \{0 \text{を } 2 \text{ のべき乗個並べた文字列}\}$   
 $= \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$

を受理するTM  $T_2$  を示す。



## TMの計算例2

ここでは、TM  $T_2$  が0000を受理する計算を示す。

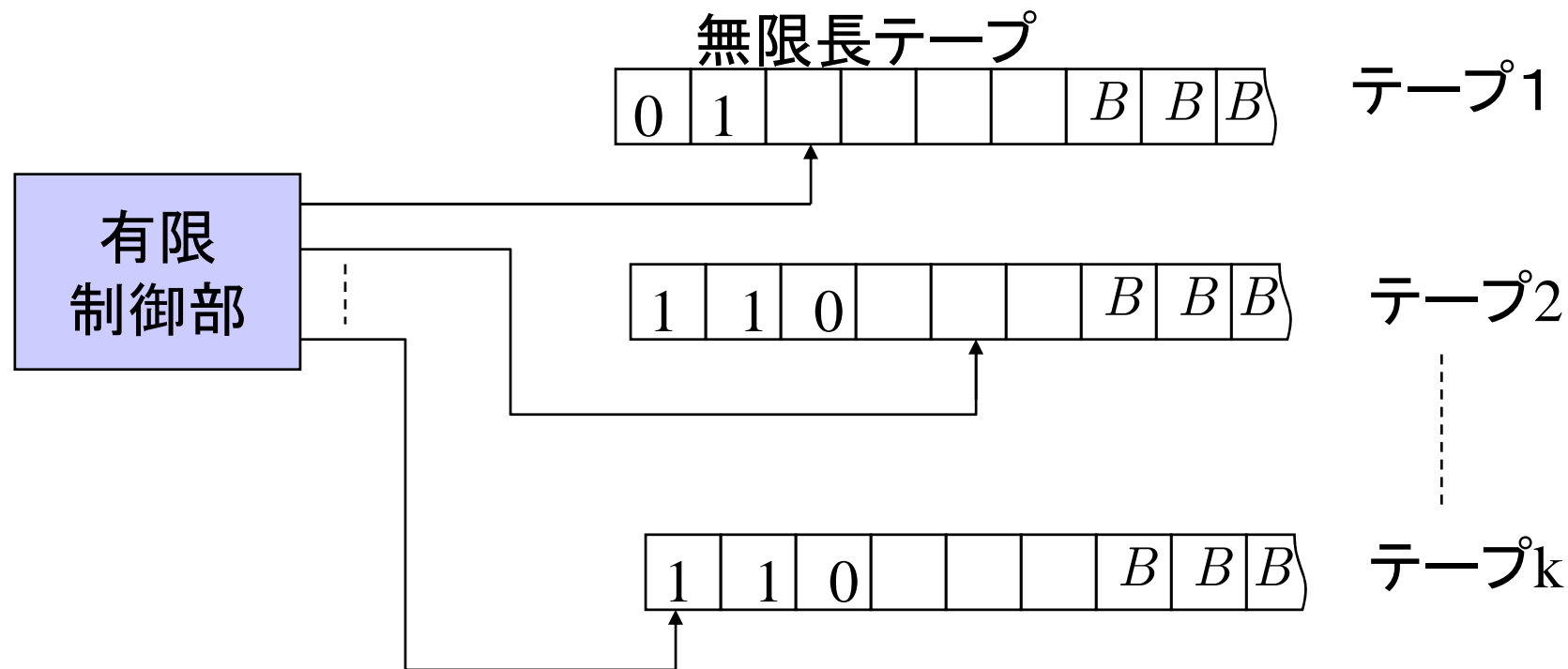
$$\begin{aligned} q_0 0000 &\Rightarrow Bq_1 000 \Rightarrow BXq_2 00 \Rightarrow BX0q_3 0 \\ &\Rightarrow BX0Xq_2 B \Rightarrow BX0q_4 XB \Rightarrow BXq_4 0XB \\ &\Rightarrow Bq_4 X0XB \Rightarrow q_4 BX0XB \Rightarrow Bq_1 X0XB \\ &\Rightarrow BXq_1 0XB \Rightarrow BXXq_2 XB \Rightarrow BXXXq_2 B \\ &\Rightarrow BXXq_4 XB \Rightarrow \dots \Rightarrow q_4 BXXXB \\ &\Rightarrow Bq_2 XXXB \Rightarrow \dots \Rightarrow BXXXq_2 B \\ &\Rightarrow BXXXBq_5 \end{aligned}$$

## 練習

言語  $L = \{w \# w \mid w \in \{a, b, \}^*\}$  を認識する  
TM を作成せよ。

## 5-2. 多テープTM

チューリング機械の拡張として、多テープチューリング機械を考えると便利ことが多い。



多テープチューリング機械の概略

# 多テープTMの状態遷移関数

多テープTMの形式的定義では、  
状態遷移関数  $\delta$  を次のように定めればよい。

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$$

状態と  $k$  ヘッドの  
読み取り値が決まると、

遷移後の状態と  
 $k$  ヘッドの書き込み値  
および移動方向が  
定まる。

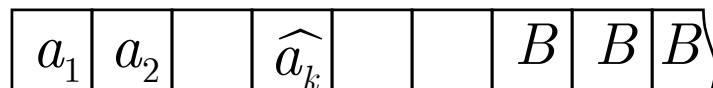
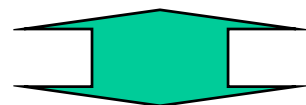
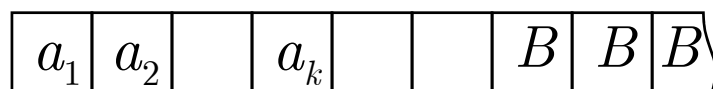
# 多テープTMとTMの等価性

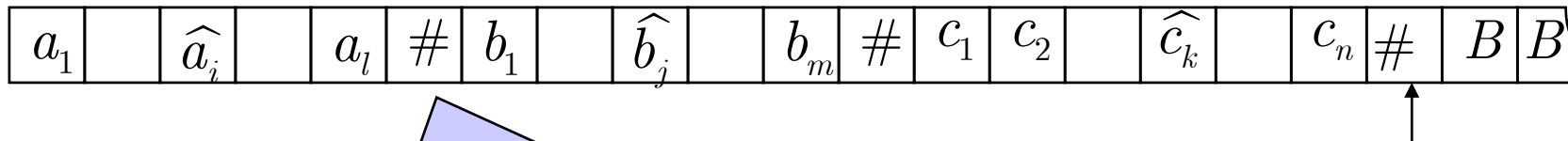
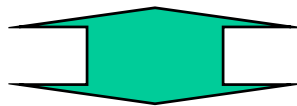
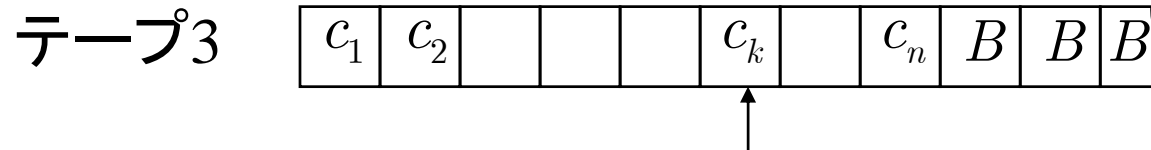
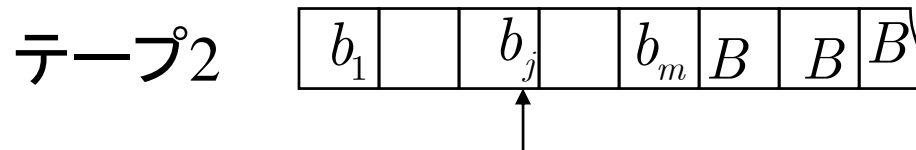
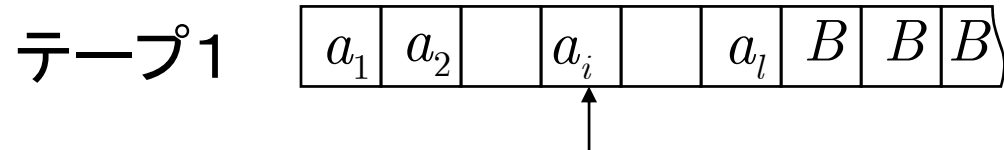
1本のテープを用いて、多テープをシミュレートできればよい。

○アイデア

ヘッド位置を表す記号を導入する

テープ



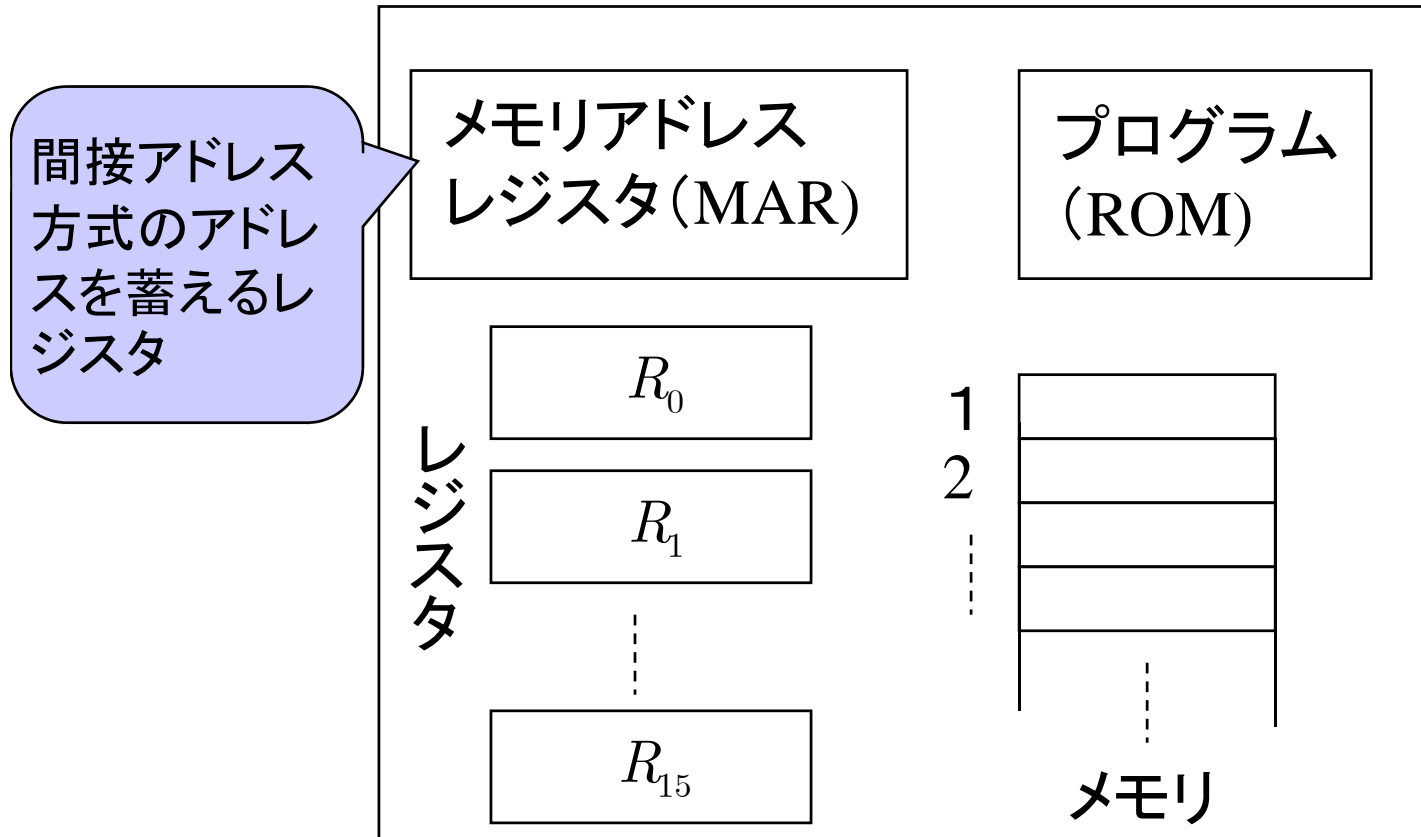


テープ区切りを表す  
特別な記号



## 5-3. ランダムアクセスマシン (RAM)

より現実的な計算機モデルとしてRAMが考えられている。



# RAMとTMの等価性

多テープを用いてRAMをシミュレートすることができる。  
(すなわち、1テープTMによってもシミュレートすることができる。)

ここでは、厳密な証明はおこなわない。  
直感的に、シミュレートが可能であると認識できればよい。

○アイデア

機能ごとにテープを用意して模倣する。

メモリテープ

# 0\$  $x_0$  # 1\$  $x_1$  # 10\$  $x_2$  # 11\$  $x_3$  ...

MAR

ワークテープ

$R_0$

⋮

$R_{15}$

## 5-5.非決定性TM

状態の遷移を非決定的にできるTMを  
非決定性チューリングマシン

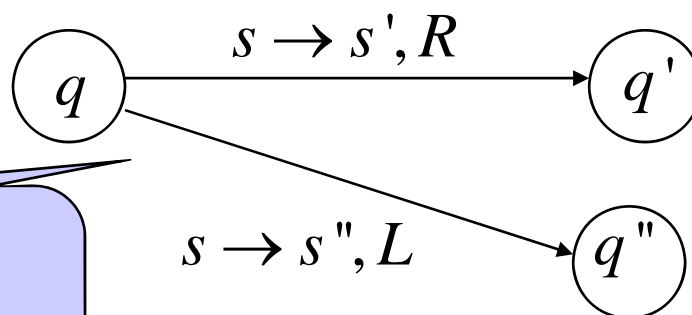
(Non-deterministic Turing Machine,NTM)

という。(なお、これまでのTMは、  
決定性チューリングマシン

(Deterministic Turing Machine,DTM)

といわれる。

同一様相から、  
2つ以上の状態  
遷移が可能なTM



# NTMの状態遷移関数

NTMの形式的定義では、  
状態遷移関数  $\delta$  を次のように定めればよい。

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$$

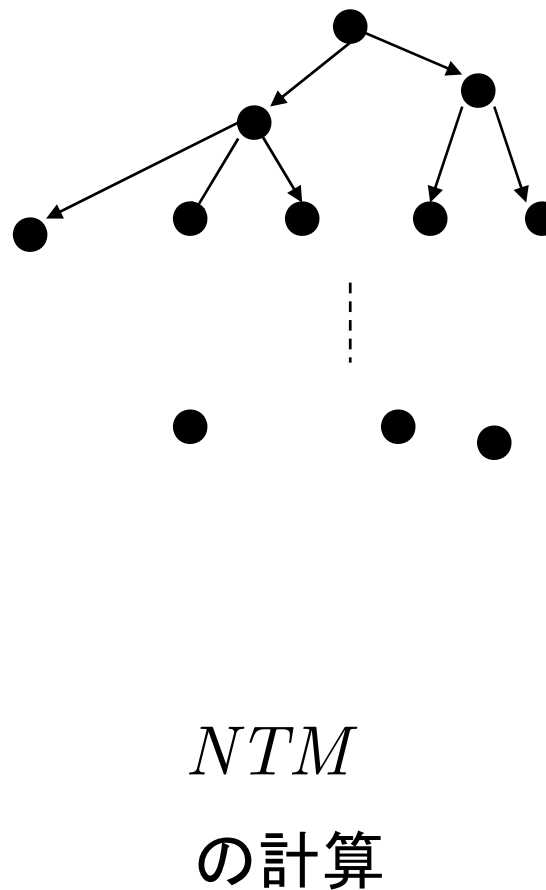
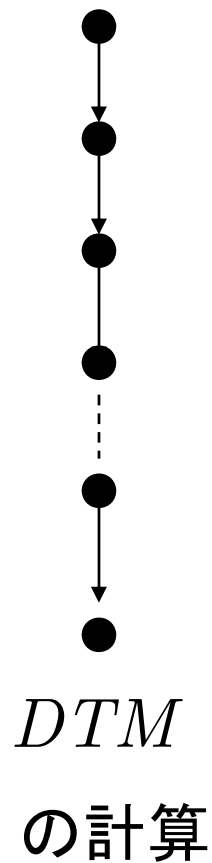
状態とヘッドの  
読み取り値が決まると、

いくつかの遷移の  
可能性のなかで  
都合の良いものに  
遷移する。

$$\delta(q, s) = \{(q', s', R), (q'', s'', L)\}$$

# NTMの計算の木

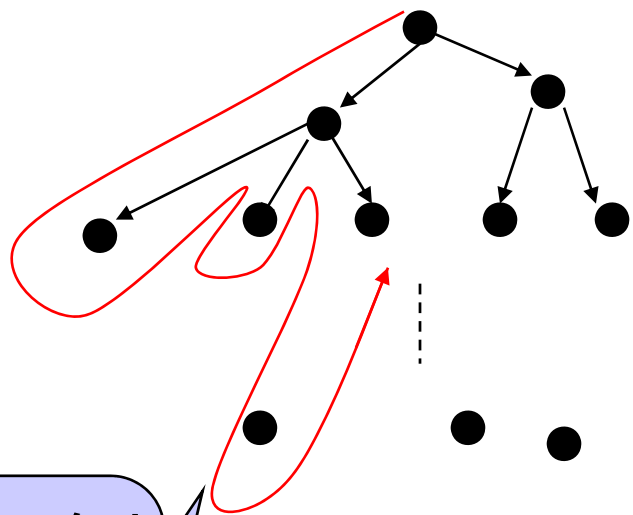
(様相の遷移の可能性)



● : 様相

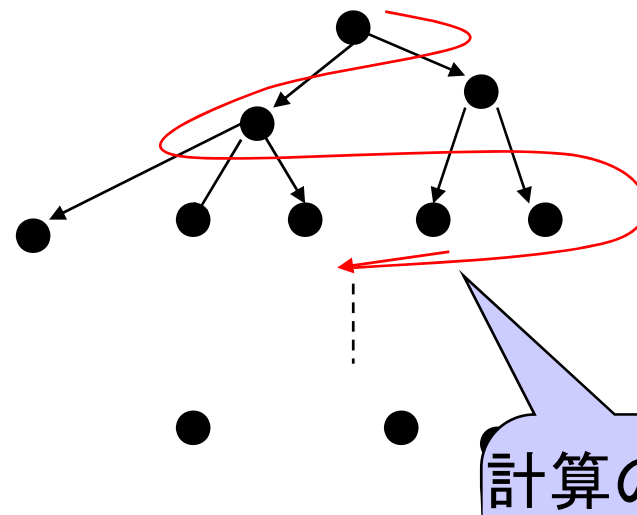
# DTMによるNTMのシミュレーション

NTMの計算の木を一本道で辿るようなDTMを設計すればよい。

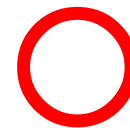


計算の途中では、どのくらいの深さか不明

深さ優先探索



幅優先探索



計算の途中が長くても、NTMが受理できれば、TMもできる。

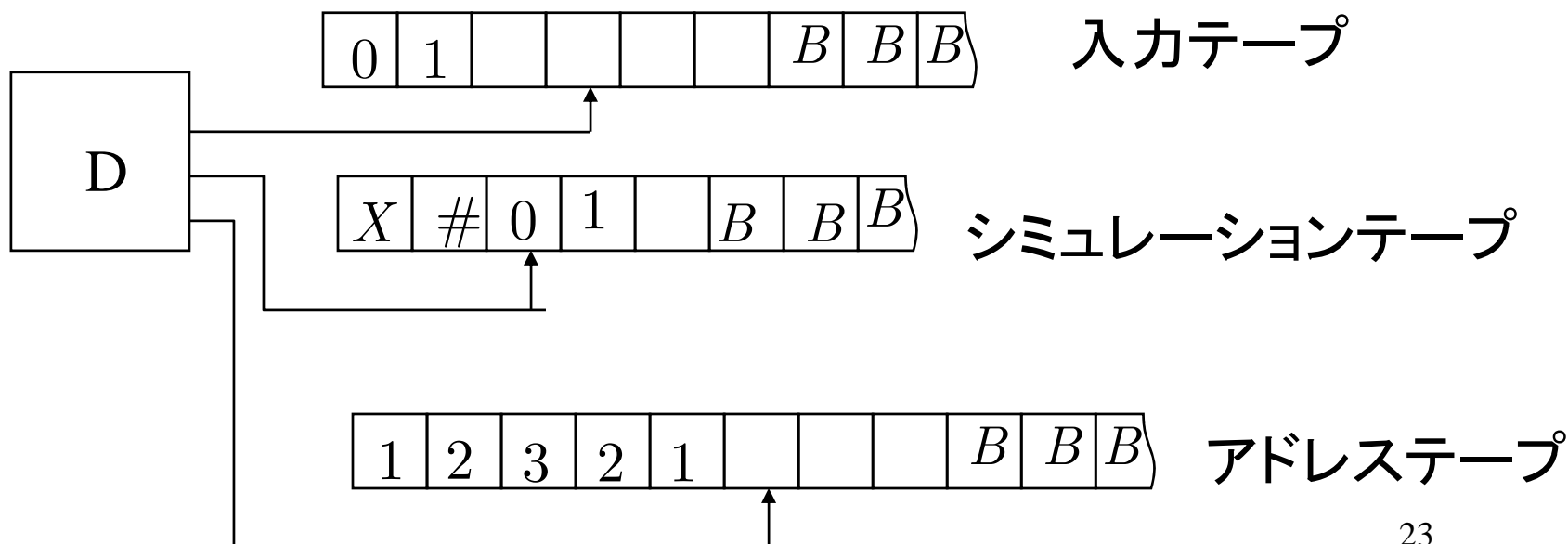
# 非決定性TMとTMの等価性

すべてのNTM  $N$ に対して、  
それと等価なDTM  $D$ が存在する。

テープ<sup>3</sup>

証明

$D$ は3つのテープを持つものとする。



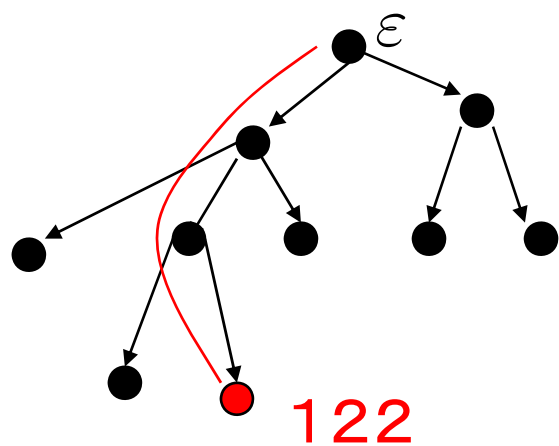
テープ1(入力テープ)は常に入力文字列を含み、決して変更しない。

テープ2は、現在シミュレートしている非決定的計算上での、Nのコピーを維持する。

テープ3は、現在シミュレートしている非決定的な計算木の探索点の位置を保持する。



Nの遷移可能の選択数の最大値をbとする。  
木のすべての節点に対して、 $\Sigma_b = \{1, 2, \dots, b\}$   
の文字列を割り当てる。



次のようなアルゴリズムにしたがって、  
シミュレーションを行う。

1. テープ1にNへの入力  $w$  をセットし、  
テープ2、テープ3は空とする。
2. テープ2に、テープ1をコピーする。
3. テープ3のアドレスにしたがって、Nの一つの枝を  
シミュレートする。  
受理状態になれば、受理する。  
テープ3のアドレスを使いきったり、遷移不可能に  
なったら、ステージ4に行く。
4. テープ3の文字列を長さの順でかつ辞書式順に  
並べ換える。  
ステージ2に行って対応する計算を一つシミュレート  
する。

このアルゴリズムによって、DはNをシミュレートすることがわかる。

## 5-5. チャーチ・チューリングのテーゼ (計算の定義)

このように、DTMはいろいろなモデルと等価であることが示された。

このような状況証拠から、  
「機械的な計算(アルゴリズム)とは、  
チューリング機械で計算できるものとしよう。」  
という提唱がなされた。

これを、**チャーチ・チューリングのテーゼ**  
**(Church-Turing thesis)**という。

つまり、アルゴリズムの定義とは、対応するチューリング機械が存在することである。