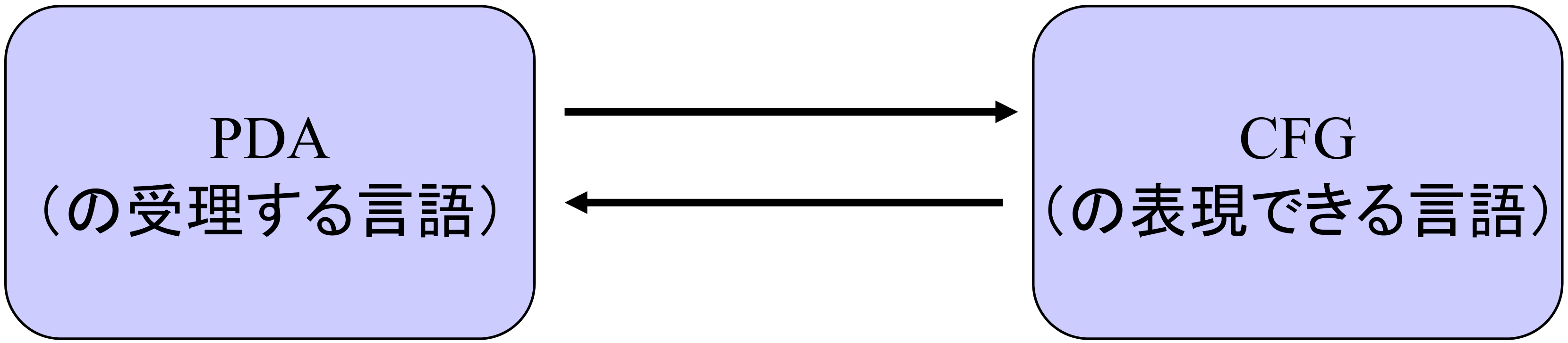
４．プッシュダウンオートマトンと
文脈自由文法の等価性

4－1. 目標

ここでは、PDAの受理する言語と、CFGが表現できる言語が等しいことを示す。この言語を**文脈自由言語（CFL）**と呼ぶ。



CLG→PDAのアイディア

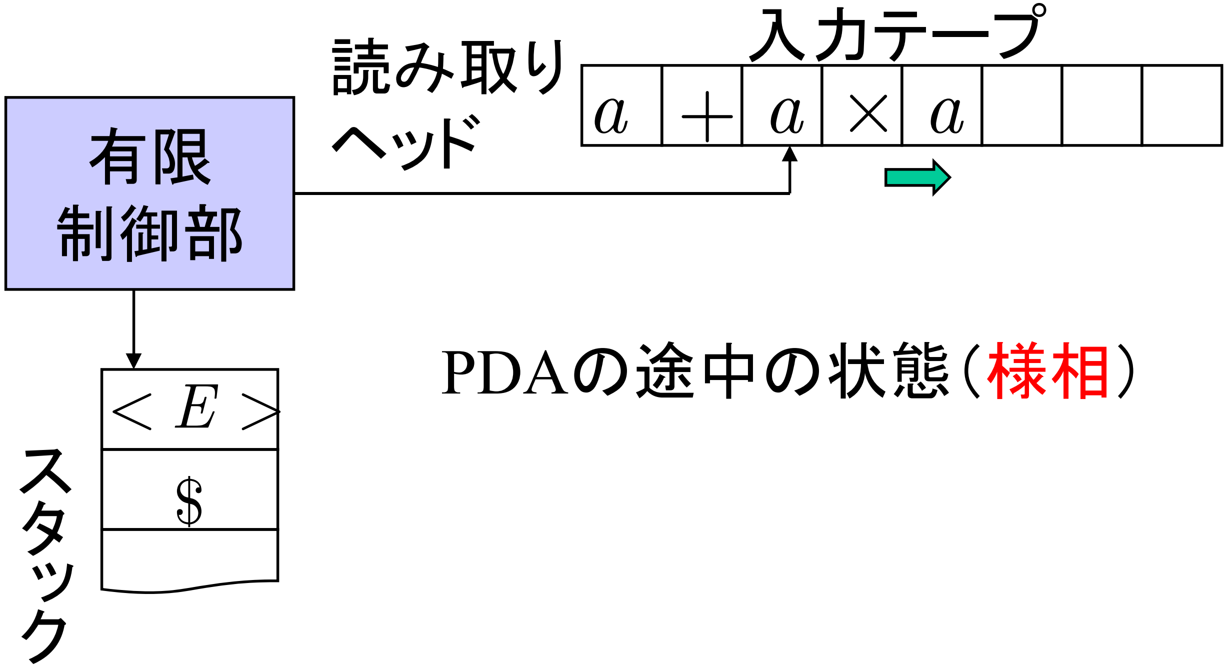
生成途中の文字列をスタックに入れておく。

例、下記生成規則における $a+a\times a$ の生成過程。

$$R=\{<E>\rightarrow<E>+<E>|<E>\times<E>|\ a\}$$

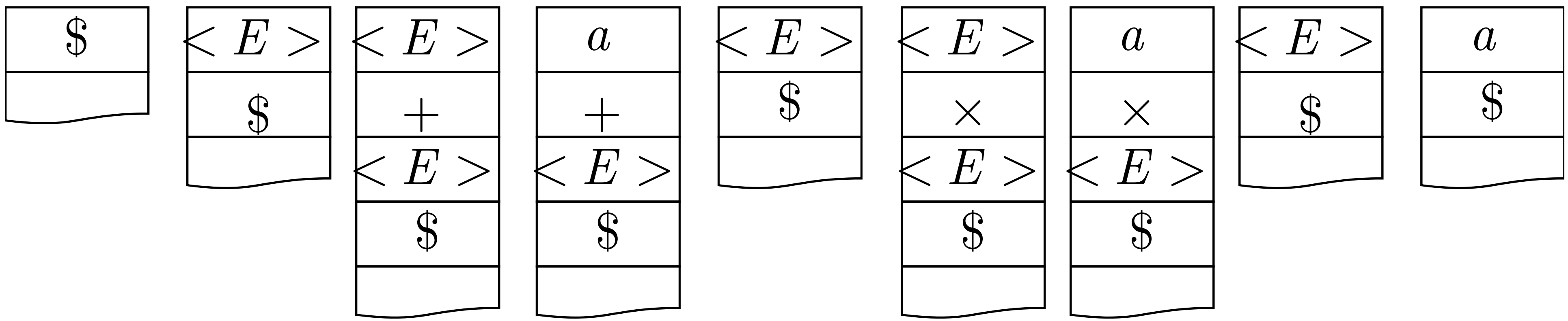
$$
\begin{aligned}
<E>\rightarrow&<E>+<E>\\
&\rightarrow a+<E>\\
&\rightarrow a+<E>\times<E>\\
&\rightarrow a+a\times<E>\\
&\rightarrow a+a\times a
\end{aligned}
$$

このとき、次のように動作するPDAを構成すればよい。



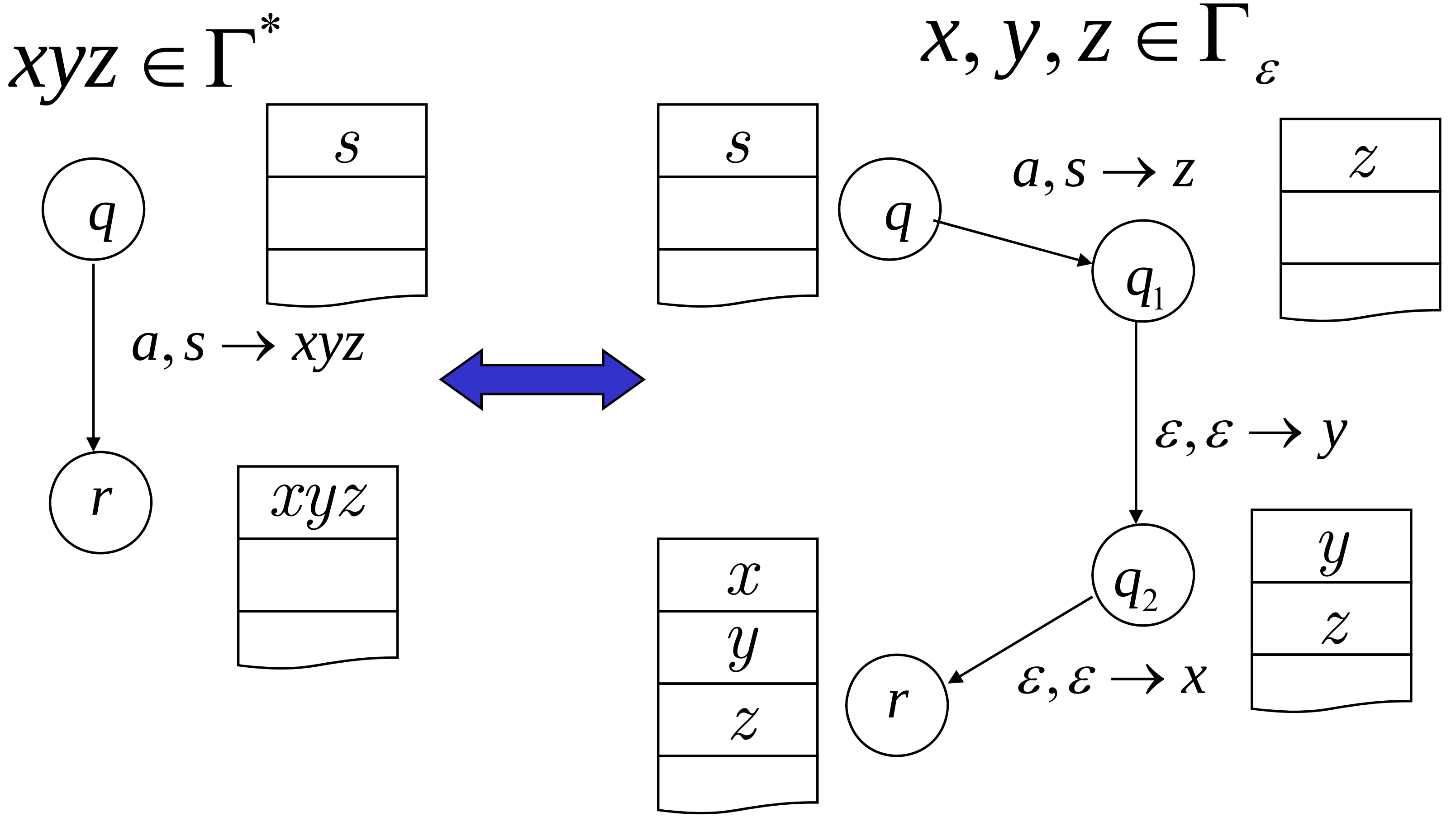
PDAの途中の状態（様相）

スタックの動き



スタックの拡張

スタックの各セルには、Γ_ε の一文字だけでなく、Γ^* の文字列を蓄えることが可能であるとする。



CFG → PDA

ある言語がCFGで記述できるとき、
その言語を受理するPDAが存在する。

証明

CFGを $C=(V,\Sigma,R,S)$ とする。

このとき、PDA $P=(Q,\Sigma',\Gamma',\delta,q_{start},F)$ を構成する。

まず、$\Sigma'=\Sigma,\quad \Gamma'=V\cup\Sigma$ とする。

また、$Q=\{q_{start},q_{loop},q_{end}\}\cup E$ とし、$F=\{q_{end}\}$ とする。

ここで、E はスタックの拡張を実現する付加的な状態の集合である。

状態遷移関数 δ は次のように定める。

$$\delta(q_{start}, \varepsilon, \varepsilon) = \left\{\left(q_{loop}, S\$\right)\right\}$$

規則による導出過程を表す遷移

各 $A \in V$ に対して、

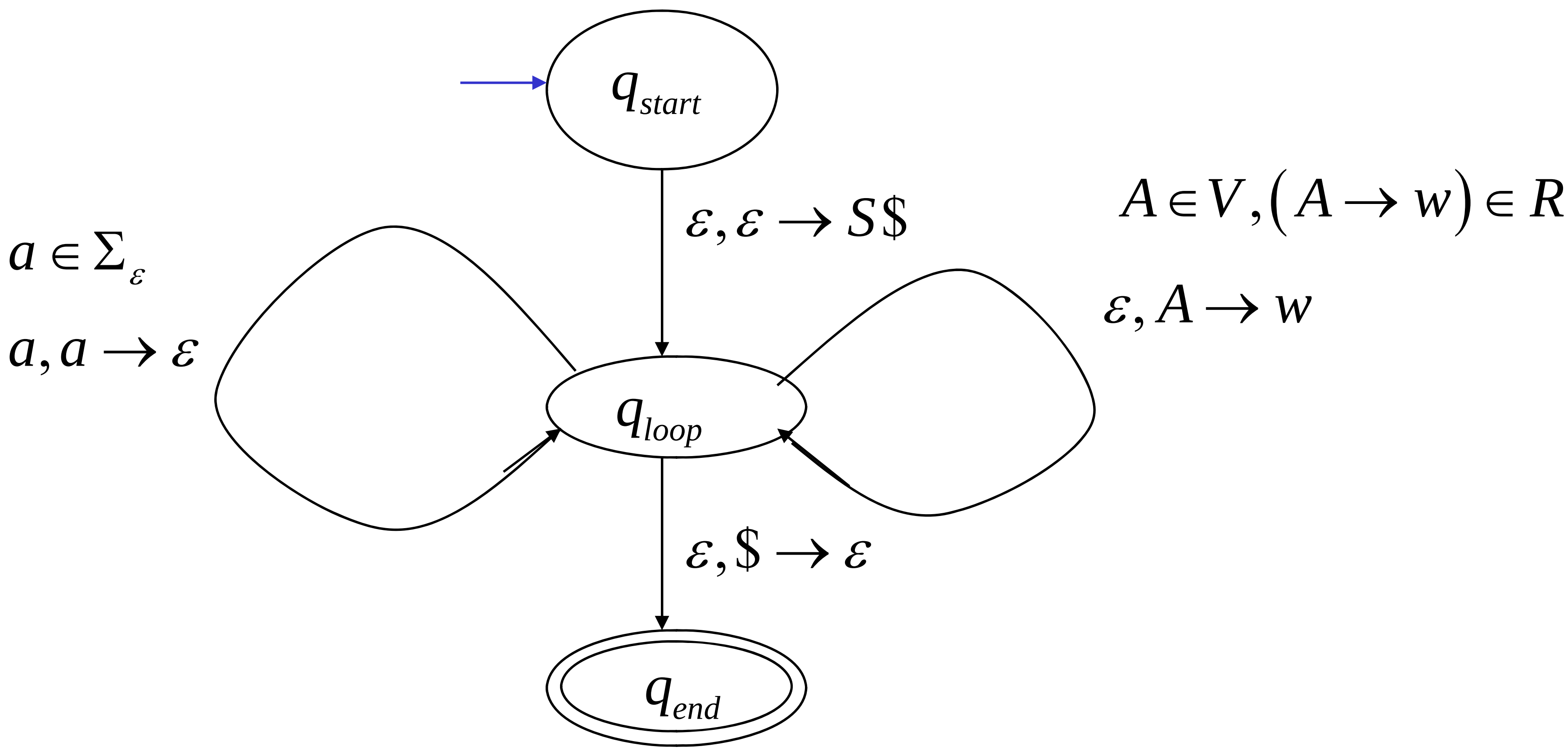
$$\delta(q_{loop}, \varepsilon, A) = \left\{\left(q_{loop}, w\right) \middle| \left(A \to w\right) \in R\right\}$$

各 $a \in \Sigma$ に対して、

$$\delta(q_{loop}, a, a) = \left\{(q_{loop}, \varepsilon)\right\}$$

左の終端記号の除去。テープ読み取りヘッドの移動を伴う。

$$\delta(q_{loop}, \varepsilon, \$) = \left\{(q_{end}, \varepsilon)\right\}$$


q_{start}
$\varepsilon, \varepsilon \rightarrow S\$$
$A \in V, (A \rightarrow w) \in R$
$a \in \Sigma_{\varepsilon}$
$a, a \rightarrow \varepsilon$
$\varepsilon, A \rightarrow w$
q_{loop}
$\varepsilon, \$ \rightarrow \varepsilon$
q_{end}

QED

例

$$C_1 = (\{<E>\}, \{+, \times, a\}, R, <E>)$$

$$R = \{<E> \to <E> + <E> | <E> \times <E> | a\}$$

$$P_1 = (\{q_{start}, q_{loop}, q_{end}, q_1, \cdots, q_k\}, \{a, +, \times\}, \{a, +, \times, <E>, \$\}, \delta, q_{start}, \{q_{end}\})$$

$$\delta(q_{start}, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_{loop}, <E>\$)\}$$

$$\delta(q_{loop}, \varepsilon, <E>) = \{(q_{loop}, <E> + <E>), (q_{loop}, <E> \times <E>), (q_{loop}, a)\}$$

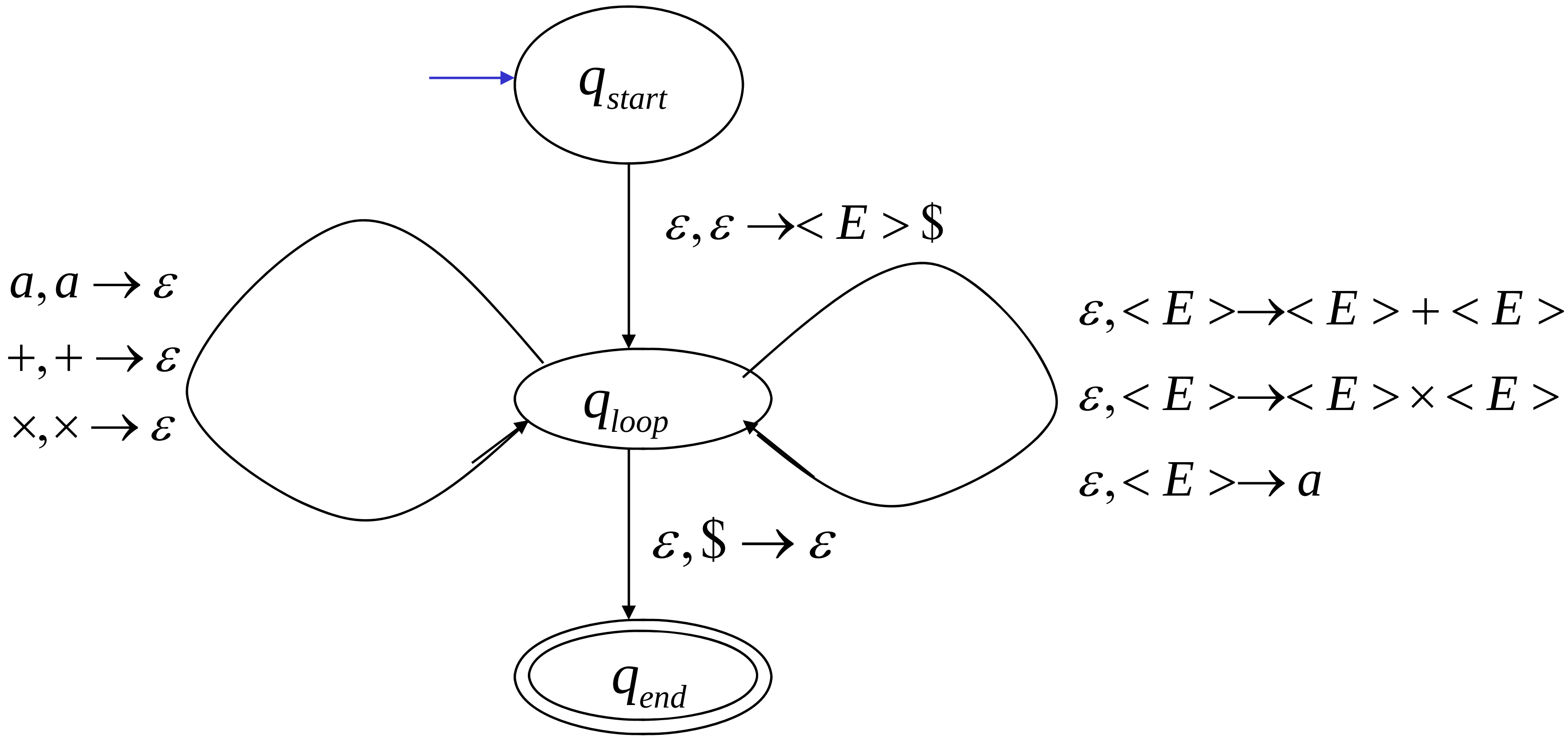
$$\delta(q_{loop}, a, a) = \{(q_{loop}, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_{loop}, +, +) = \{(q_{loop}, \varepsilon)\}$$

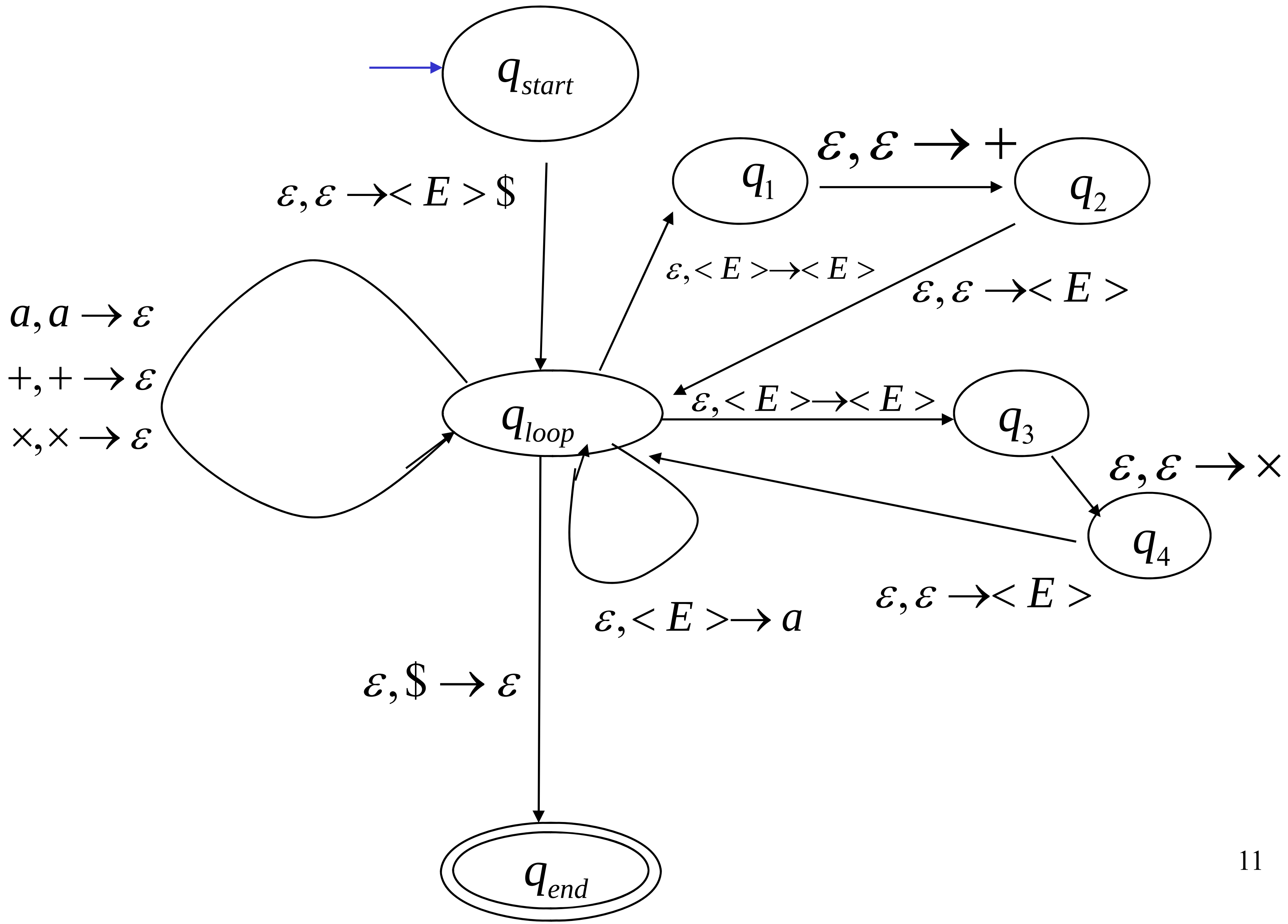
$$\delta(q_{loop}, \times, \times) = \{(q_{loop}, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_{loop}, \varepsilon, \$) = \{(q_{end}, \varepsilon)\}$$

（拡張スタックを用いた）等価なPDA



１文字スタックへの変換



練習

次のCFGが記述している言語を受理するPDAを
状態遷移図で示せ。

$$C_2 = \left(\{S, T\}, \{a, b\}, R', S\right)$$

$$R' = \{S \to aTb \mid b,$$

$$T \to Ta \mid \varepsilon\}$$

PDA→CFGのアイディア

PDAのスタックの高さを基にして、CFGの規則を生成する。
そのために、PDAを次のように制限する。

１．唯一つの受理状態 q_{end} を持つ。
２．受理する前にスタックを空にする。
３．各遷移は、pushかpopのいずれかであり、
　　同時には行わない。

このように制限しても、PDAの受理能力に変化はない。

PDAからCFGの構成

PDAを　$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{start}, \{q_{end}\})$　として、

CFG　$C = (V, \Sigma', R, S)$　を構成する。

1．変数の設定

$$V = \{A_{pq} \mid p, q \in Q\}$$

任意の状態の組に
対応して変数を用意

2．終端記号の設定

$$\Sigma' = \Sigma$$

アルファベットは共通

3．開始記号の設定

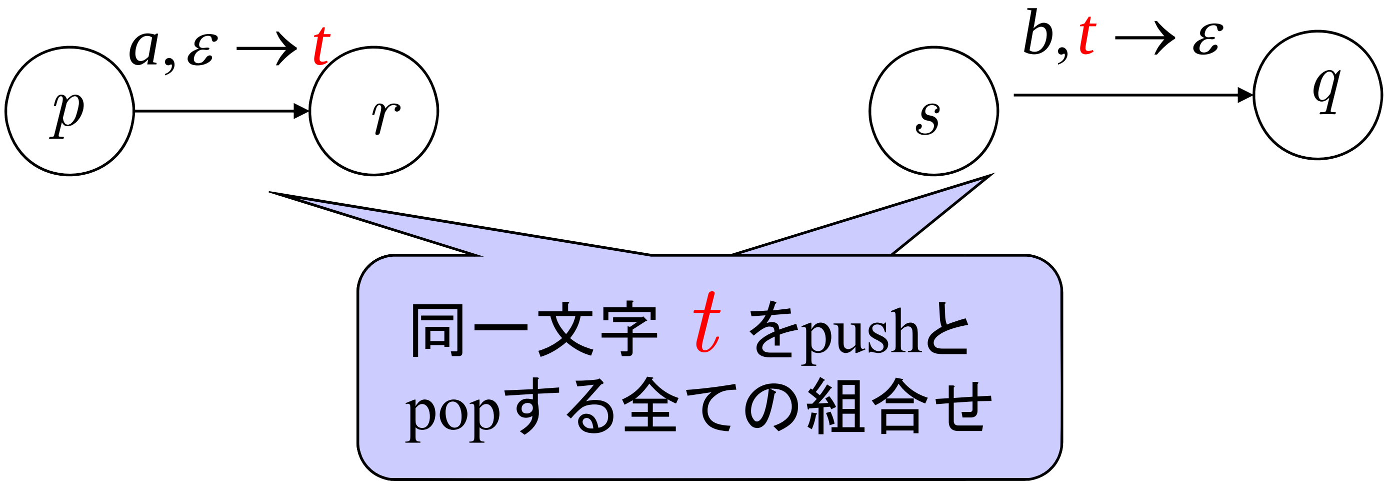
$$S = A_{q_{start} q_{end}}$$

４．規則の設定

（１）各々の $p,q,r,s \in Q, t \in \Gamma,\ a,b \in \Sigma_{\varepsilon}$ に対して、

$(r,t) \in \delta(p,a,\varepsilon)$ かつ $(q,\varepsilon) \in \delta(s,b,t)$ ならば

$A_{pq} \to aA_{rs}b$ をRに加える。



（2）各々の $p, q, r \in Q$ に対して、

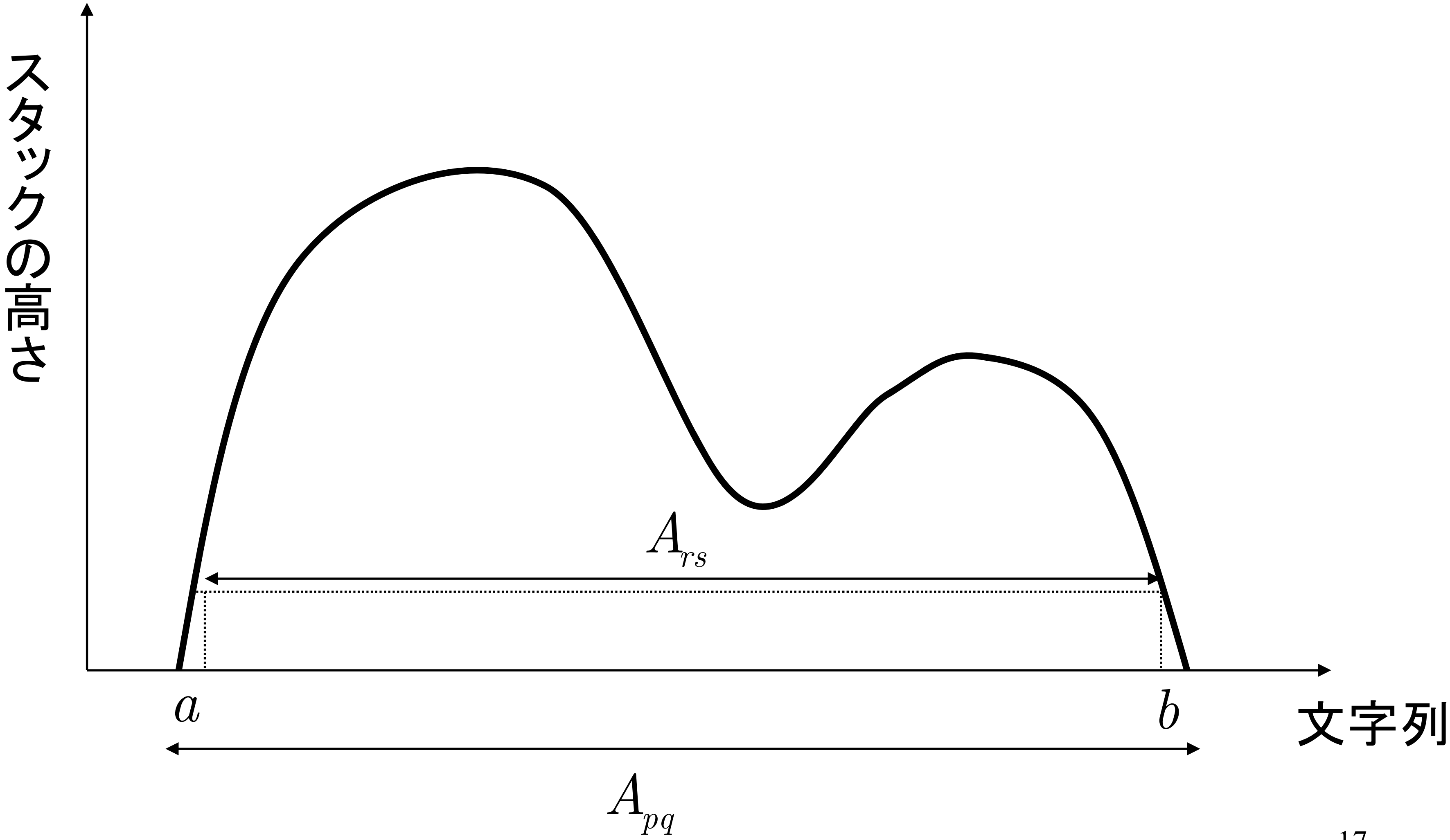
$A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$ をRに加える。

（3）各々の $p \in Q$ に対して、

$A_{pp} \rightarrow \varepsilon$ をRに加える。

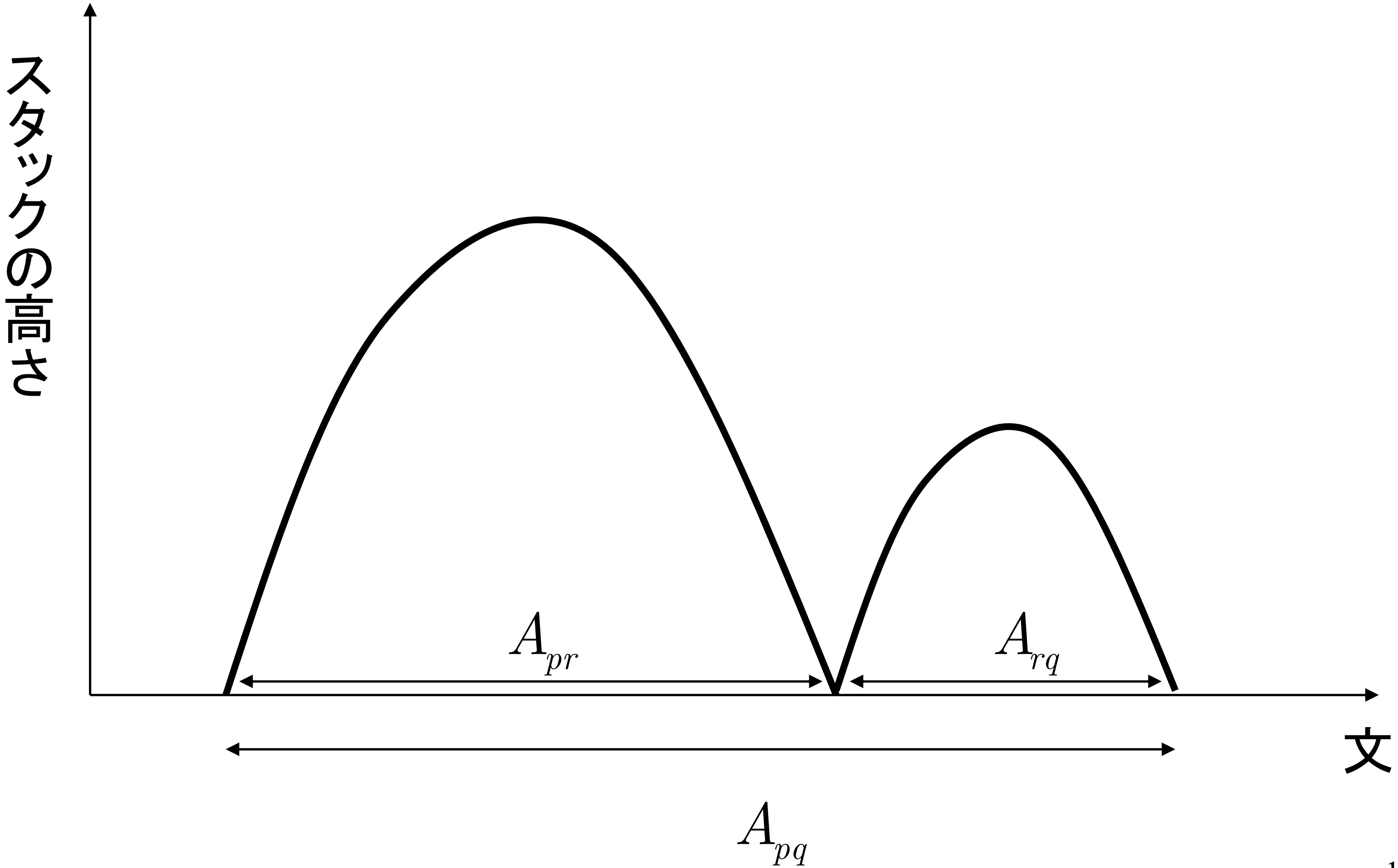
イメージ1

（1）

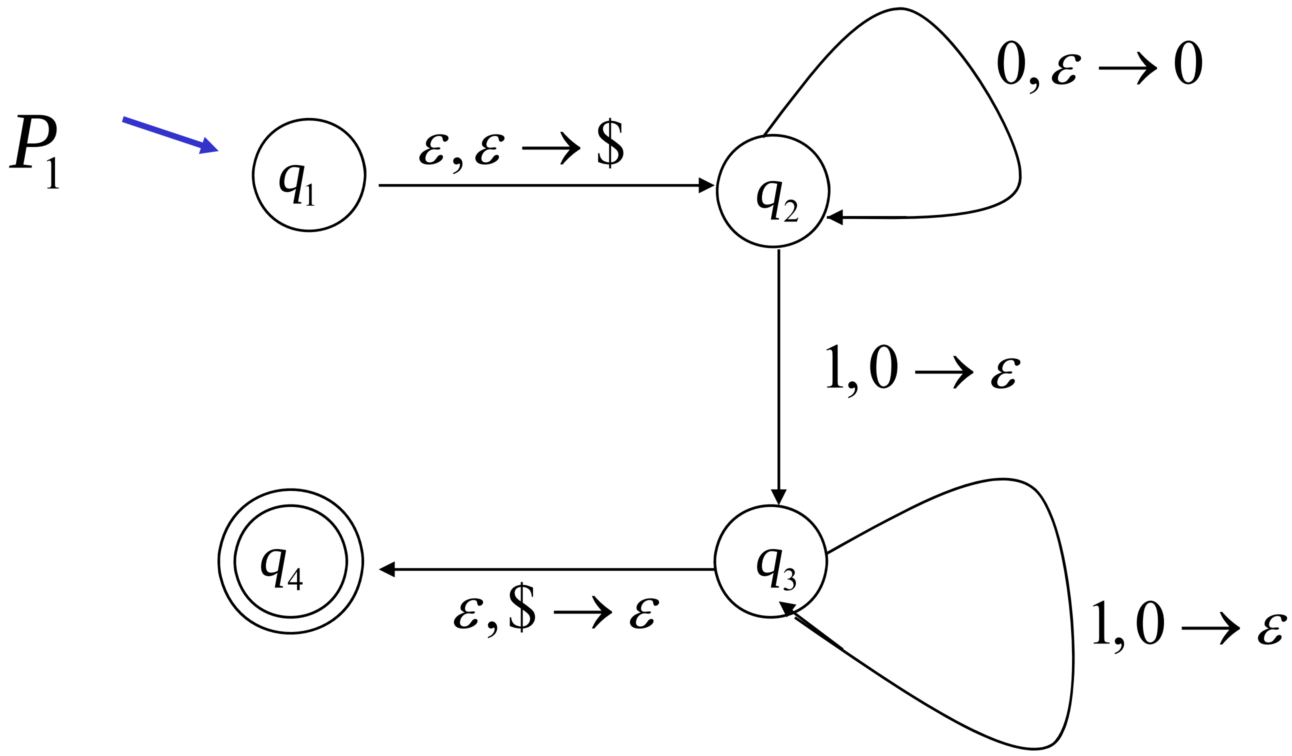


イメージ2

（2）



例



まず、 $V = \{A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, \cdots, A_{44}\}$

$\Sigma = \{0,1\}$

$S = A_{14}$

(1) $t = \$$ のとき、

$q_1 \xrightarrow{\varepsilon,\varepsilon \to \$} q_2$ $\qquad$ $q_3 \xrightarrow{\varepsilon,\$ \to \varepsilon} q_4$

$$A_{14} \longrightarrow A_{23}$$

$t = 0$ のとき、

$q_2 \xrightarrow{0,\varepsilon \to 0} q_2$ $\qquad$ $q_3 \xrightarrow{1,0 \to \varepsilon} q_3$

$$A_{23} \longrightarrow 0A_{23}1$$

$q_2 \xrightarrow{0,\varepsilon \to 0} q_2$ $\qquad$ $q_2 \xrightarrow{1,0 \to \varepsilon} q_3$

$$A_{23} \longrightarrow 0A_{22}1$$

（2）

$$A_{13} \to A_{12}A_{23}$$

$$A_{14} \to A_{12}A_{24} \mid A_{13}A_{34}$$

$$\vdots$$

（3）

$$A_{11} \to \varepsilon$$

$$A_{22} \to \varepsilon$$

$$\vdots$$

なお、規則としては、以下だけで生成できることがわかる。

$$A_{14} \to A_{23}$$

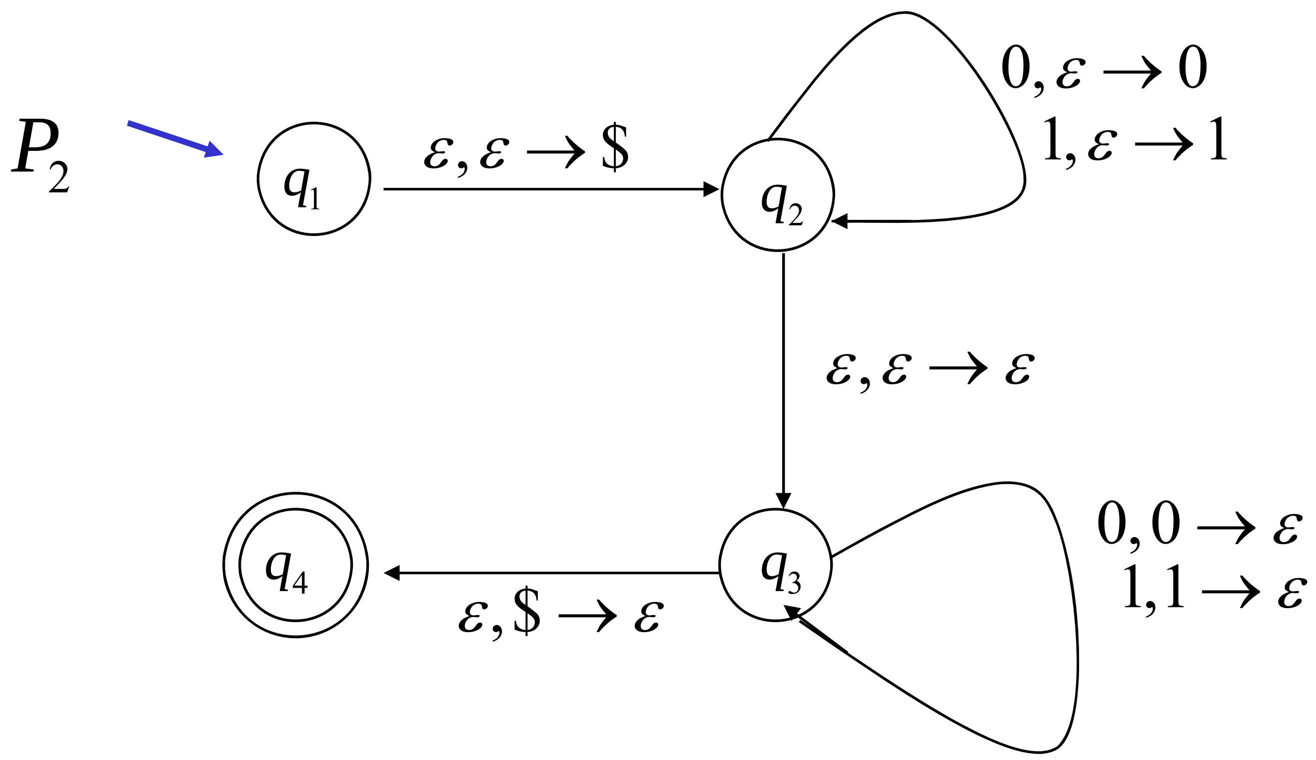
$$A_{23} \to 0A_{23}1$$

$$A_{23} \to 0A_{22}1$$

$$A_{22} \to \varepsilon$$

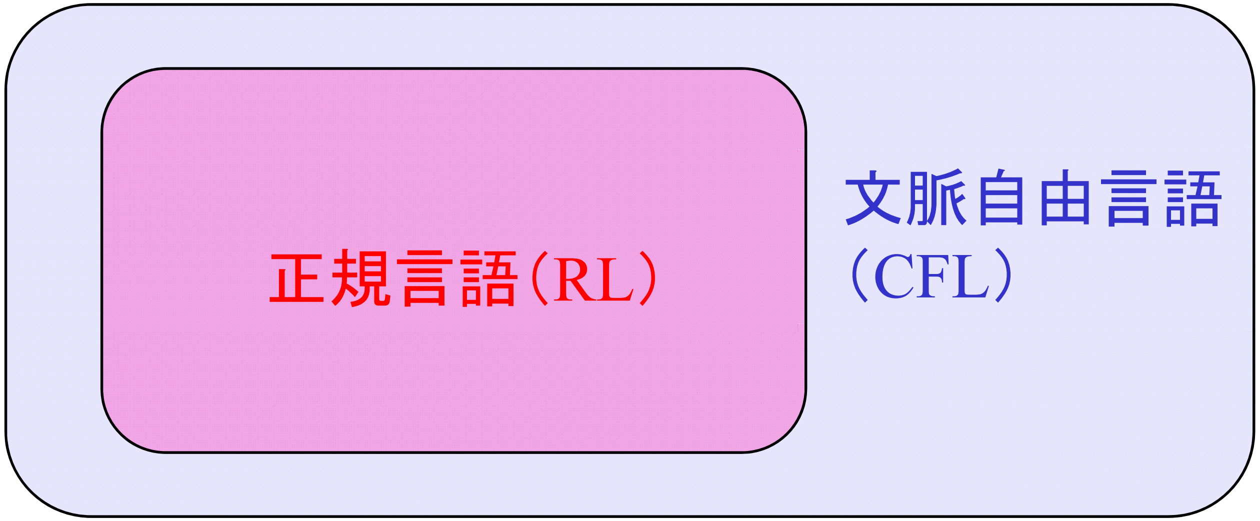
練習

次のPDAが受理する言語を生成する
CFGを示せ。
（変数、規則は、必要部分だけでよい。）



正規言語(RL)と文脈自由言語(CFL)

正規言語は有限オートマトンで受理される。
文脈自由言語はプッシュダウンオートマトンで受理される。
プッシュ機能を用いなければPDAはDFAとしても機能する。
よって、正規言語すべてをPDAは受理する。
逆に、正規言語でない言語もPDAは受理できる。
したがって、言語の包含関係は下図のようになる。



（CFLの）ポンピング補題

（CFLの）ポンピング補題

AがCFLであるならば、ある数 p（ポンピング長）が存在して、p より長い任意の文字列 $s \in A$ に対して、次を満たすように s を

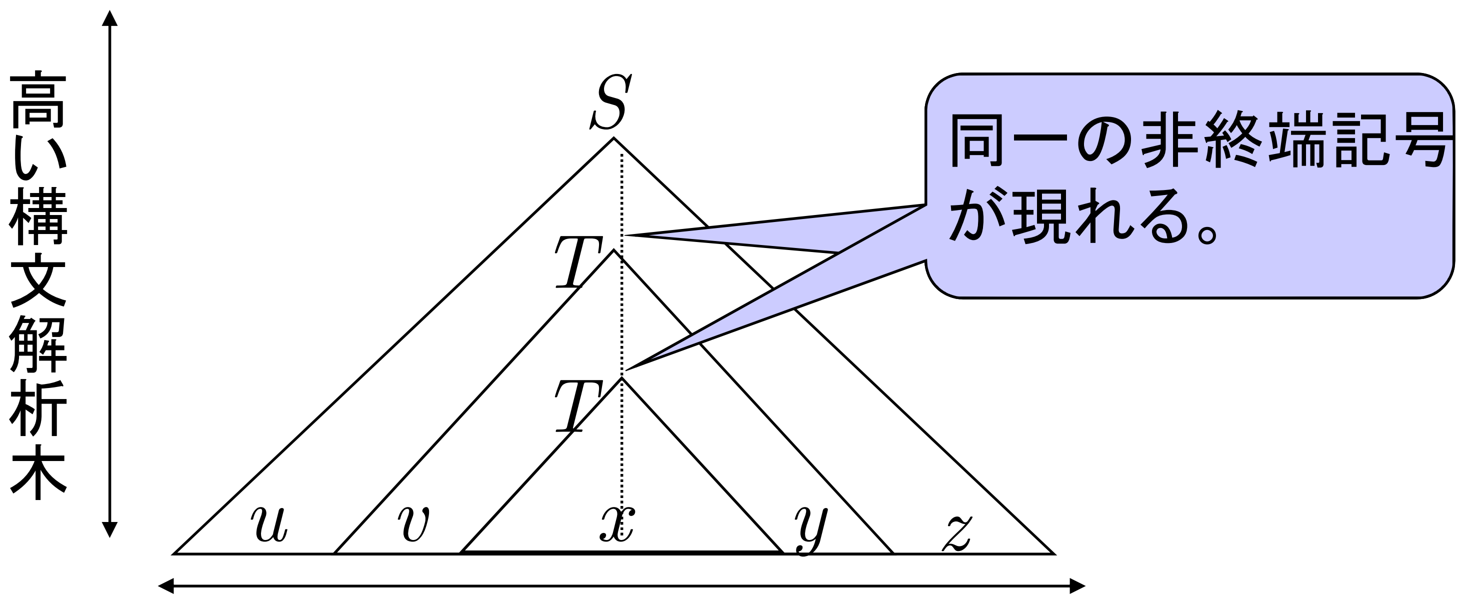
$$s = uvxyz$$

に分割できる。

1. 各 $i \geq 0$ について、$uv^i xy^i z \in A$
2. $|vy| \geq 1, (y \neq \varepsilon)$
3. $|vxy| \leq p$

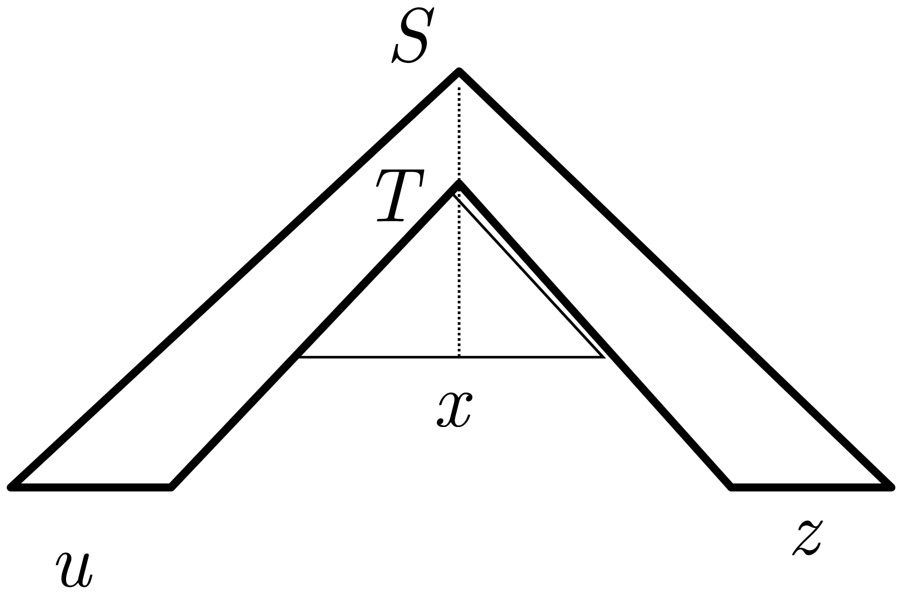
ポンピング補題の意味

ものすごく長い文字列では、構文解析木の高さも高くなる。
このとき、開始変数から終端記号までの“道”上に
同じ非終端記号が現れてします。
このように、いったん同じ非終端記号が現れたときには、
この非終端記号を繰り返し適用することによって、
文字列を長くできる。

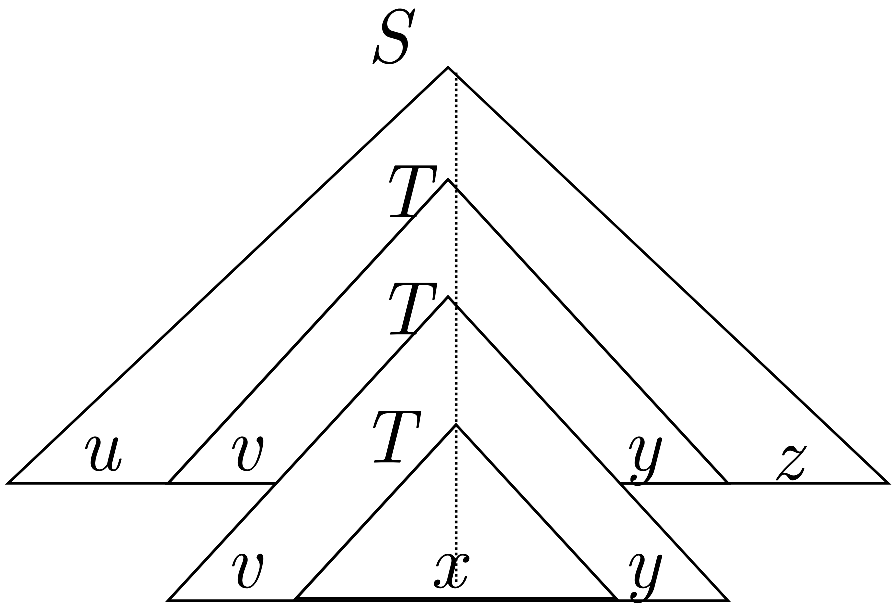


$s = uvxyz$ がものすごく長い

構文解析木の葉から開始記号までの道上に
同じ非終端記号が現れたとき、
下のような言語もCFGにより生成されるはずである。



$uxz \in A$



$$uvvxyyz \in A$$

$$uv^{i}xy^{i}z \in A$$

ポンピング補題の証明

CFL Aを認識するCFGをGとし、
b を基礎の右辺にある文字の最大数とする。
$b \geq 2$ としてよい。

このとき、構文解析木の各節点は、b より多くの子を持つことができない。
したがって、開始記号からの距離が h であるところには、高々 b^h 個の節点しかない。

ここで、$|V|$ をGの非終端記号の総数とする。
ポンプ長 p を $b^{|V|+2}$ とおく。
このとき、構文解析木の高さ、すなわちSから葉までの道の長さは、少なくとも $|V|+2$ である。

s を少なくとも長さ p であるAの文字列とする。
このとき S を生成する構文解析木の高さは、少なくとも、
$|V|+2$ である。
構文解析木において、終端記号は、葉だけであるので、
開始記号Sから葉の一つ手前まではすべて非終端記号である。
すなわち、$|V|+1$個の非終端記号が出現しているはずである。

一方、非終端記号は$|V|$個しかないので、
同じ非終端記号が繰り返して出現しているはずである。
この記号を T とあらわす。

この場合、前述の図のように、$s=uvxyz$ と分割できること
がわかる。

$\mathcal{QED}$

CFLの限界

次の言語は文脈自由言語ではない。

$$C = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

$$C = \{w \mid w\text{はa, b, c順に同じ文字数だけ繰り返す。}\}$$

$$= \{\varepsilon, abc, aabbcc, aaabbbccc, \cdots\}$$

証明

ポンピング補題を用いる。

CがCFLであると仮定する。(背理法の仮定)
p をポンピング長とする。
文字列を $s = a^p b^p c^p$ とする。
このとき、明らかに、$|s| \geq p$ である。

このとき、ポンピング補題より、s は

$$s = uvxyz$$

と分割できるはずである。

このとき、次の2つの場合に分けて考える。
（1）v と y はどちらも1種類の文字からなる。
（2）v と y のどちらかが2種類以上の文字からなる。

場合（1）、
このときは、文字列 uv^2xy^2z は
同じ個数のa,b,c を含むことができない。
したがって矛盾が生じる。

場合（2）、このときは、文字列 uv^2xy^2z では
同じ個数の a,b,c を含むことかもしれない。
しかし、a,b,c の順序に狂いか生じる。
よって、矛盾である。

いずれの場合も矛盾が生じるので、
命題が証明された。

$\mathcal{QED}$