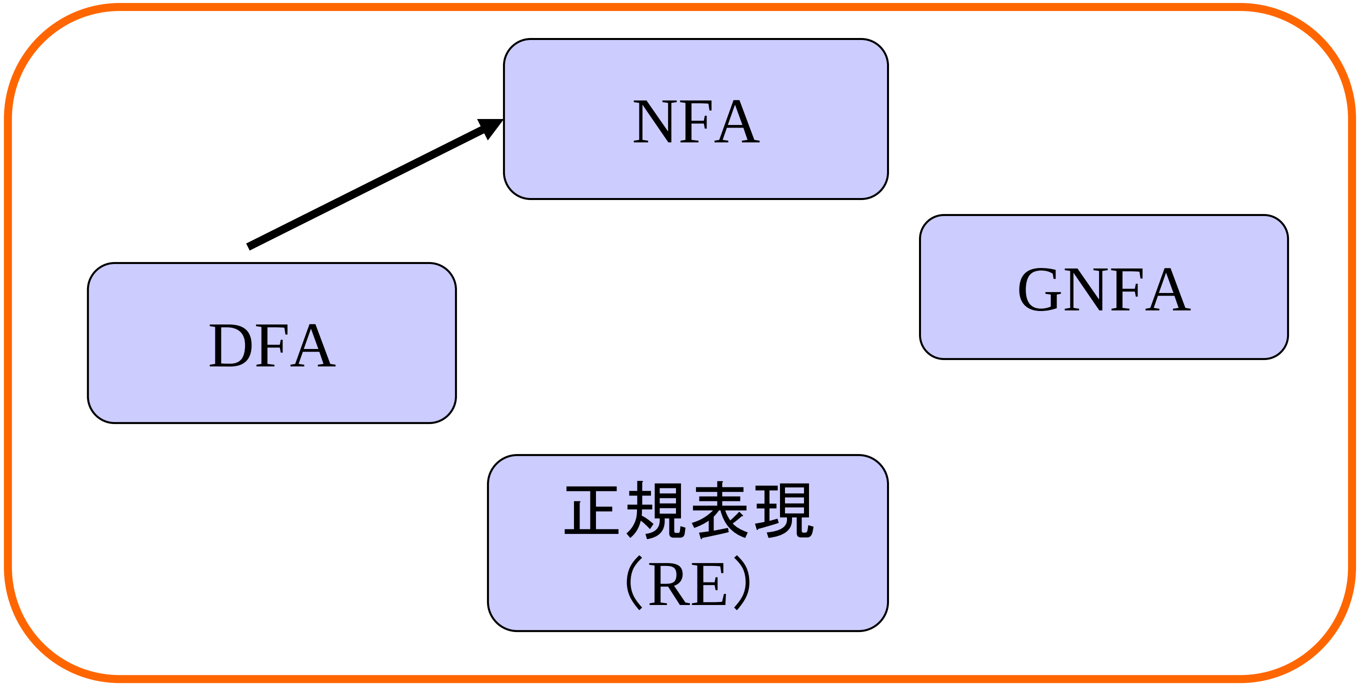
２．正規言語とオートマトンの等価性

モデル間の関係

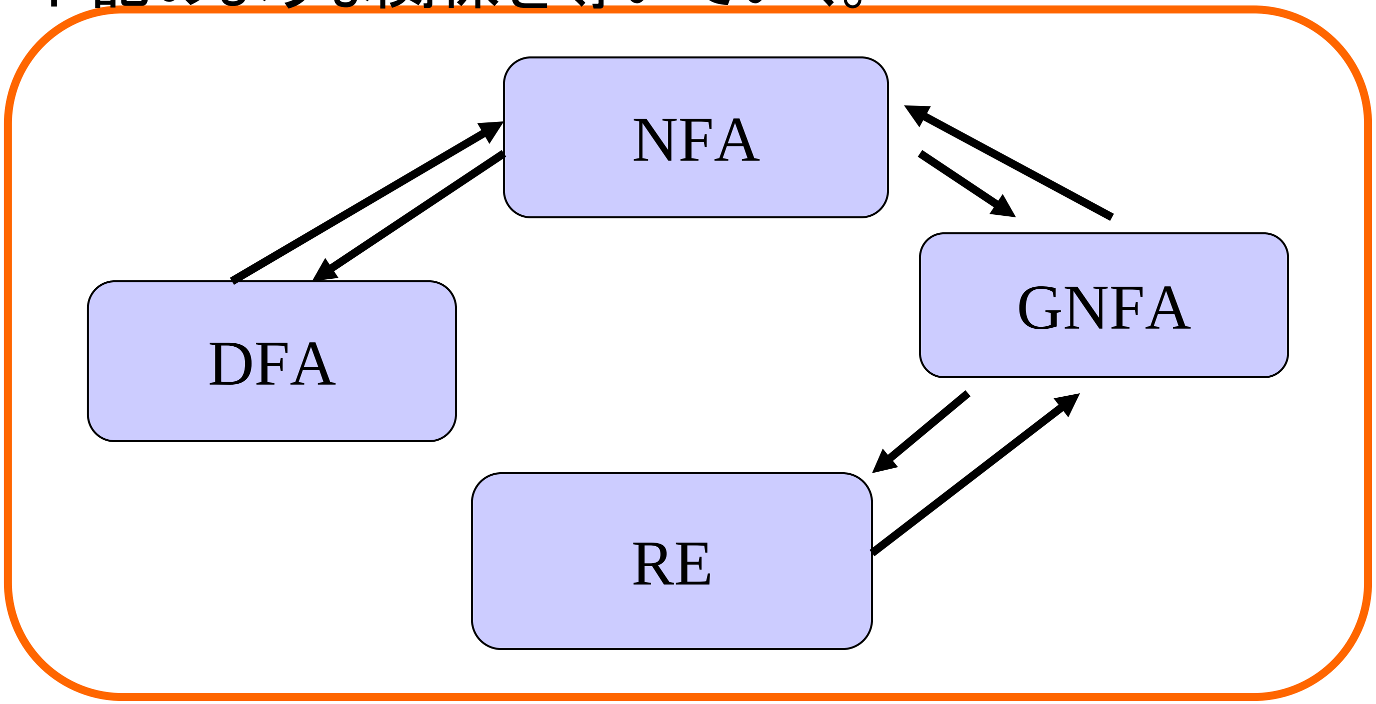
モデルの言語表現能力を評価する。
モデルAが与えられたとき、同じ言語を受理するモデルBが作れるときモデルBの方が言語記述能力が高い（低くはない）。
これを、A→Bとアークを引いて表す。

例えば、DFAの記述は、ほとんどその定義のまま、NFAの記述になる。したがって、



目標

これらのモデルがすべて同じ言語記述能力があることを示したい。そのため、
下記のような関係を導いていく。



DFAからNFAへ

$$\text{DFA} \longrightarrow \text{NFA}$$

直感的には、明らかだが、ここでは、
形式的に示す。

任意のDFAを$D=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$とする。
このとき、D と同じ言語を受理するNFA
$N=(Q',\Sigma,\delta',q_0',F')$ を構成する。

1．$Q'=Q, q_0'=q_0, F'=F$　とする。

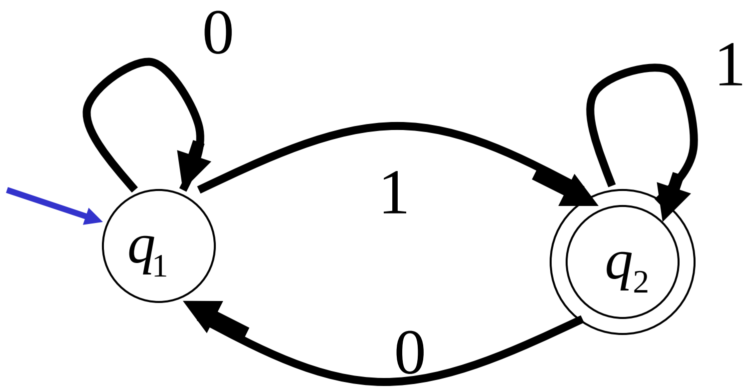
2. $\delta(q_x)=q_y$ のとき、$\delta'(q_x)=\{q_y\}$とする。

例

$$D = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_2\})$$

δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

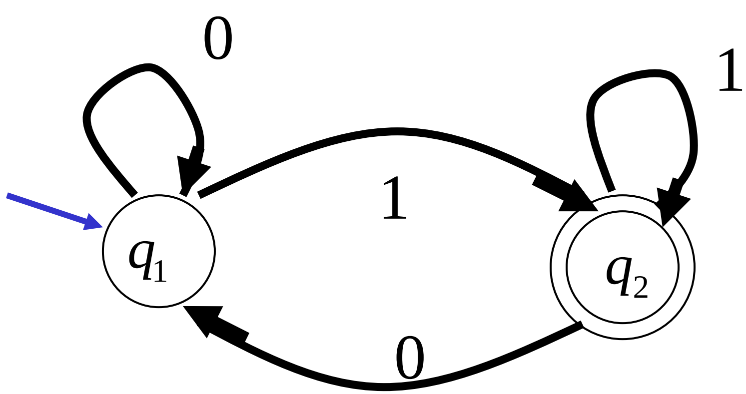
D



$$N = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta', q_1, \{q_2\})$$

δ'	0	1
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$

N



NFAからDFAへ

NFA → DFA

任意のNFAを$N=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$とする。
このとき、N と同じ言語を受理するDFA
$D=(Q',\Sigma,\delta',q_0',F')$ を構成する。

1. $Q'=\mathcal{P}(Q)$とする。

   （NFAの状態のべき集合で、DFAの状態を作る。）

2. $q_0'=\{q_0\}$ とする。

3. F' $= \{$NFAの受理状態を含むような状態$\}$

$= \{q \in Q' \mid q \cap F \neq \phi\}$

4. $\delta'(q,s)$ $= \{q$のいずれかの状態から

$s \in \Sigma$で遷移する状態$\}$

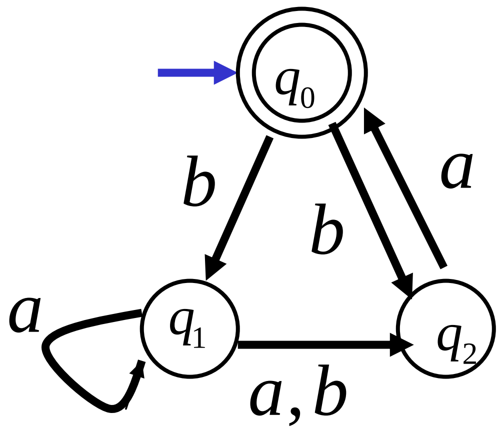
$$= \bigcup_{r \in q} \{\delta(r,s)\}$$

例 $\Sigma = \{a, b\}$ とする。

NFA $N = \{\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_0\}\}$

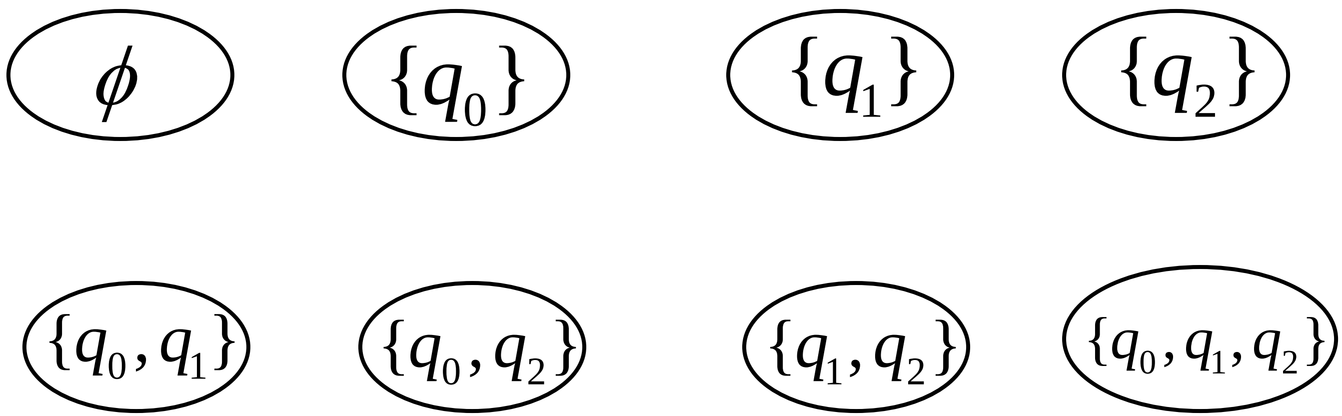
δ	a	b
q_0	ϕ	$\{q_1, q_2\}$
q_1	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_0\}$	ϕ

N



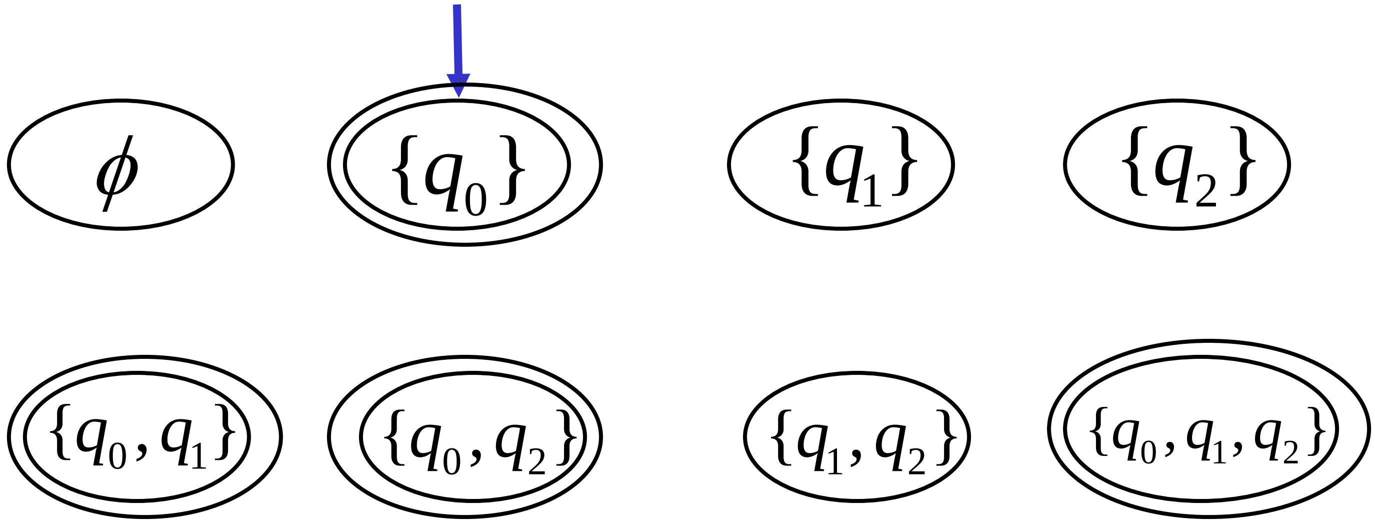
このNと同じ言語を受理するDFA
$D = \{Q', \Sigma, \delta', q_0', \{q_0\}, F'\}$
を作成する。

1. $$Q' = \mathcal{P}(Q)$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \phi, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \\ \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\} \end{array} \right\}$$



2. $q_0' = \{q_0\}$

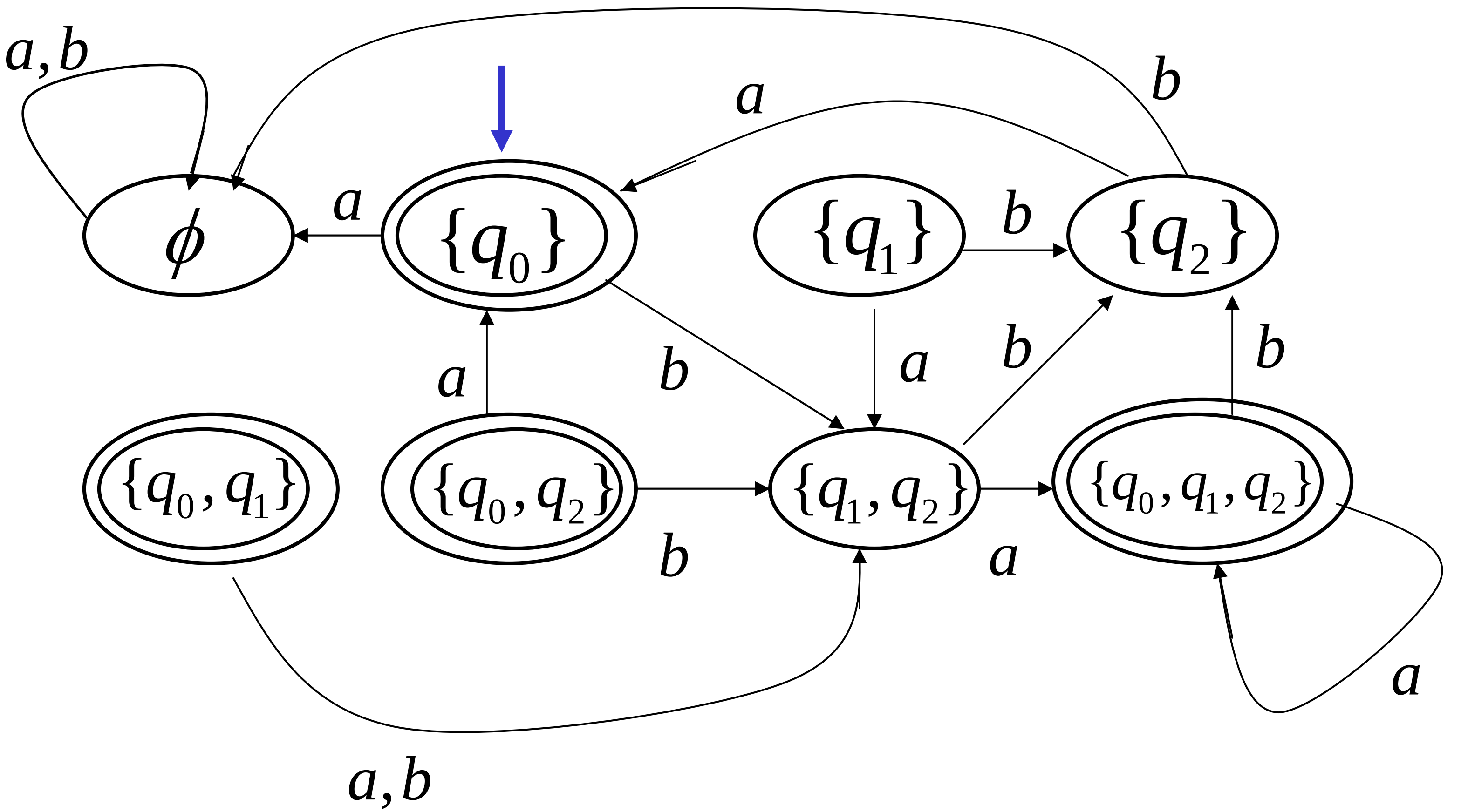
3. $F' = \left\{ q \in Q' \mid q \cap F \neq \phi \right\}$



4. $\delta'(q,s)=\bigcup_{r\in q}\{\delta(r,s)\}$

δ	a	b
q_0	ϕ	$\{q_1, q_2\}$
q_1	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_0\}$	ϕ

δ'	a	b
ϕ	ϕ	ϕ
$\{q_0\}$	ϕ	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_0\}$	ϕ
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$


a, b
a
b
ϕ
a
$\{q_0\}$
$\{q_1\}$
b
$\{q_2\}$
a
b
a
b
b
$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$
b
a
a
a, b

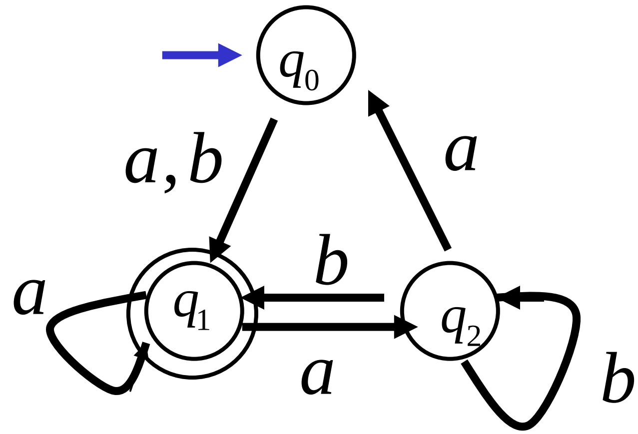
練習

$\Sigma = \{a, b\}$ とする。

NFA　$N = \left(\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1\}\right)$

δ	a	b
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_1, q_2\}$	ϕ
q_2	$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$

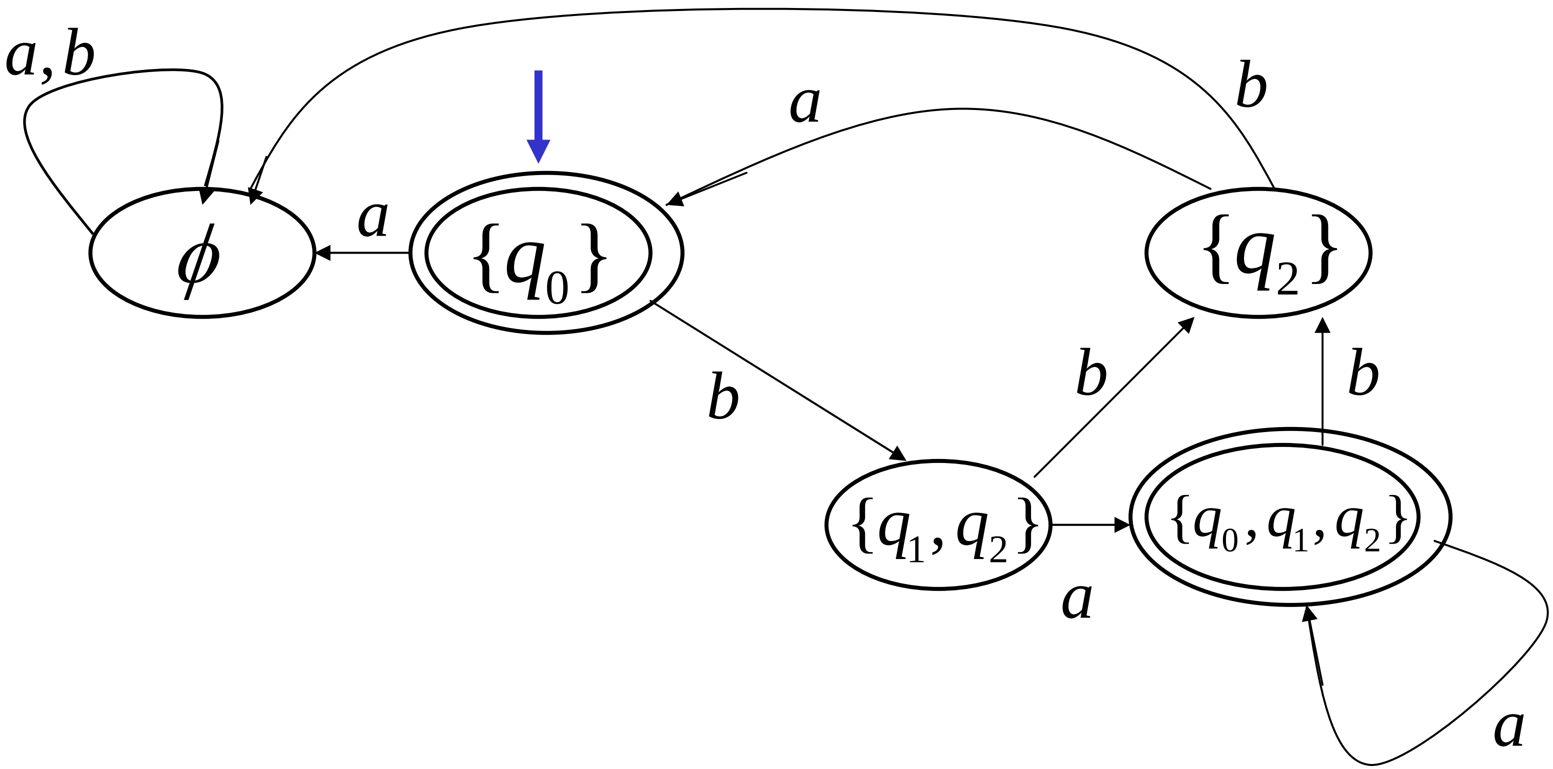
N



このNと同じ言語を受理するDFA
$D = \left(Q', \Sigma, \delta', q_0', \{q_0\}, F'\right)$
を構成せよ。

補足

初期状態から、到達可能でない状態はDFAから削除できる。



NFA→DFAの証明

文字列 x の長さ $|x|$ に関する帰納法で

$$\delta'(q_0', x) = \{q_1, q_2, \cdots, q_i\}$$

であるための必要十分条件が、

$$\delta(q_0, x) = \{q_1, q_2, \cdots, q_i\}$$

であることを示す。

基礎

$$|x| = 0$$

このとき、$x = \varepsilon$ であり、しかも

$q_0' = \{q_0\}$ である。

よって、明らかに成り立つ。

帰納

$|x| \leq m$ のとき成り立つと仮定する。

長さが $m+1$ の文字列 xs （ $s \in \Sigma$ ）に対して、

$$\delta'(q_0', xs) = \delta'(\delta'(q_0', x), s)$$

を考える。

帰納法の仮定より、

$$\delta'(q_0', x) = \{p_1, p_2, \cdots, p_j\}$$

$$\Leftrightarrow \delta(q_0, x) = \{p_1, p_2, \cdots, p_j\}$$

また、δ' の定義から、

$$\delta'(\{p_1, p_2, \cdots, p_j\}, s) = \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$$

$$\Leftrightarrow \delta(\{p_1, p_2, \cdots, p_j\}, s) = \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$$

よって、

$$\delta'(q_0', xs) = \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$$
$$\Leftrightarrow \delta(q_0, xs) = \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$$

また、

$$\delta'(q_0', x) \in F' \Leftrightarrow \delta(q_0, x) \cap F \neq \phi$$

である。

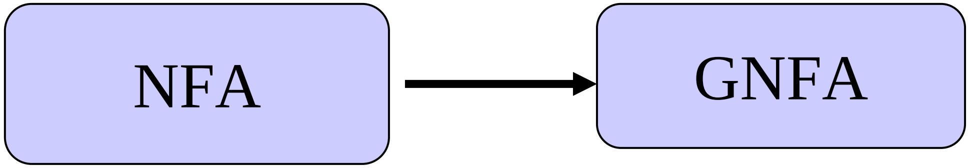
したがって、

$$L(D) = L(N)$$

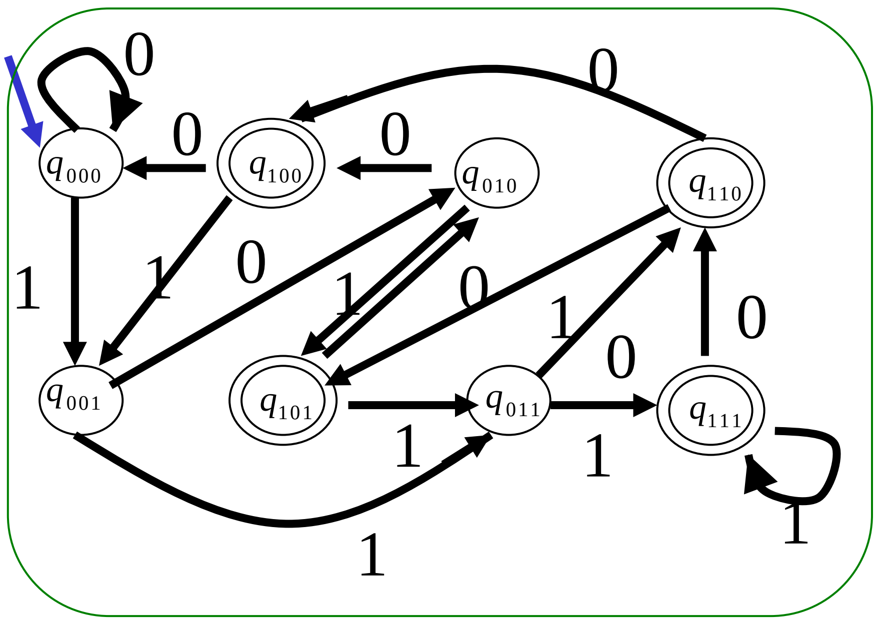
である。

$\mathcal{QED}$

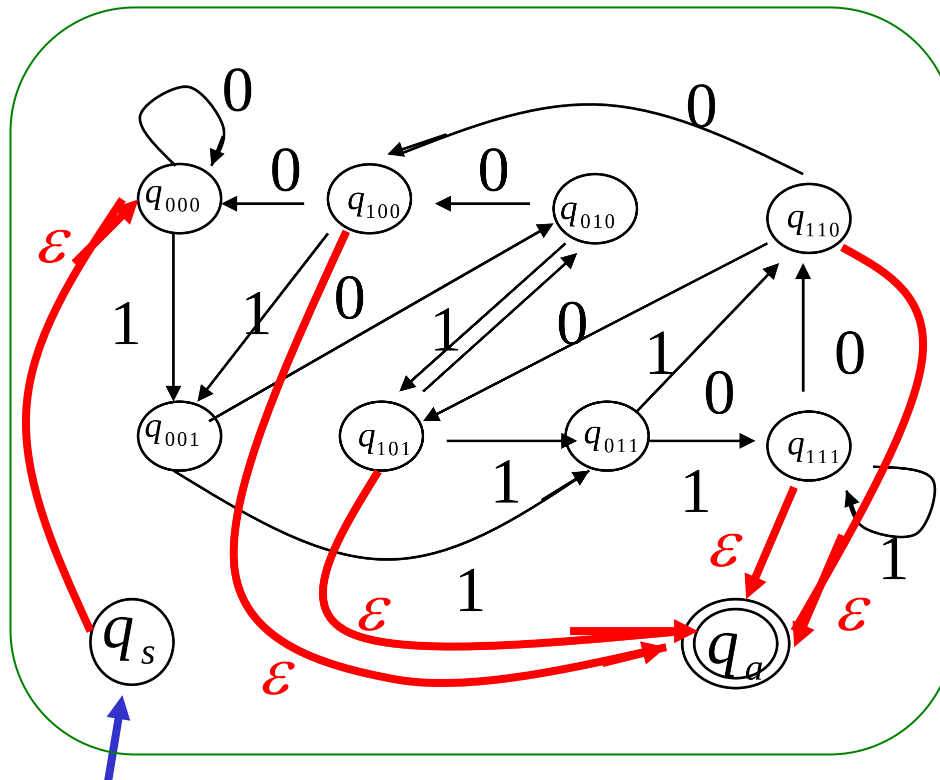
NFAから拡張NFAへ



NFAの受理状態が複数あるのに対して、
GNFAの受理状態は一つである。



NFA



拡張NFA

ここでは、NFA→GNFAを形式的に示す。

任意のNFAを$N=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$とする。
このとき、Nと同じ言語を受理するGNFA
$G=(Q',\Sigma,\delta',q_s,q_a)$ を構成する。

１．状態の追加

$$Q'=Q\cup\{q_s,q_a\}$$

２. 状態遷移関数δ'の決定

・通常の状態

$q \in Q, s \in \Sigma$ に対して、

$$\delta(q,s) = P = \{q_x \mid q_x \text{はqから遷移可能な関数}\}$$

のとき、

$q \in Q' - \{q_s, q_a\}, s \in \Sigma$に対して、$\delta'(q, q_x) = s$

・初期状態

$$\delta'(q_s, q_0) = \varepsilon$$

・受理状態

$q \in F$ に対して、

$$\delta'(q, q_a) = \varepsilon$$

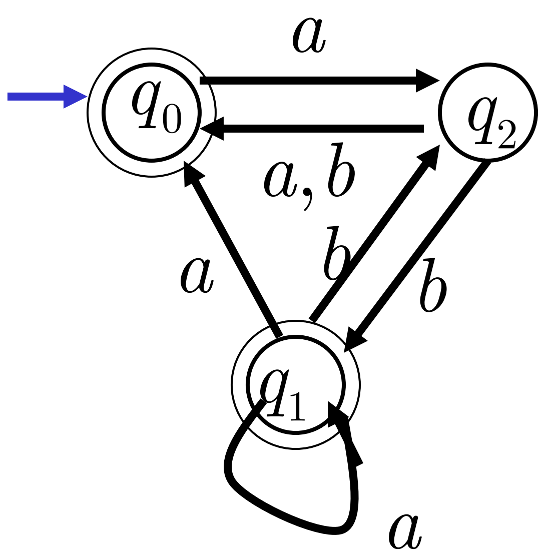
・上で定められていない定義域

$$\delta'(q, q') = \phi$$

練習

$\Sigma = \{a, b\}$とする。

次のNFAに対して、同じ言語を受理するGNFAを状態遷移図と形式的定義の両方で与えよ。



正規表現からGNFAへ

$$\text{RE} \longrightarrow \text{GNFA}$$

方針:
任意の正規表現 r に対して、

$$L(r) = L(G)$$

となるような

$$G = (Q, \Sigma, \delta, q_s, q_t)$$

を構成する。

正規表現に基づいて、再帰的に構成していく。

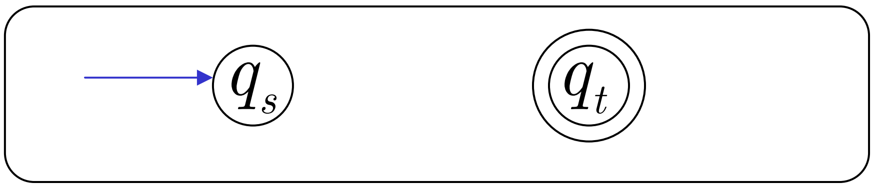
演算数による帰納法

アルファベットを $\sum$ とする。

基礎

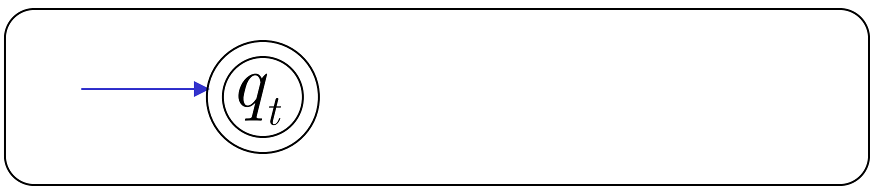
$r = \phi$ のとき、

G_ϕ

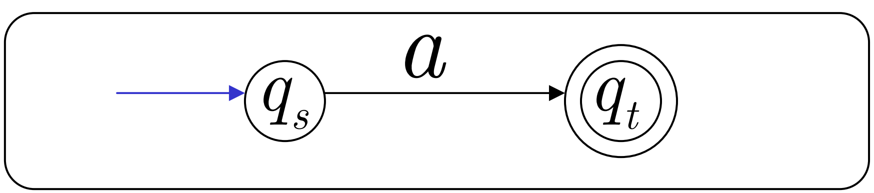


$r = \varepsilon$ のとき、

G_ε



$r = a(\in \Sigma)$



帰納

演算数がm 以下のどんな正規表現r'も
対応するGNFAがあるとする。

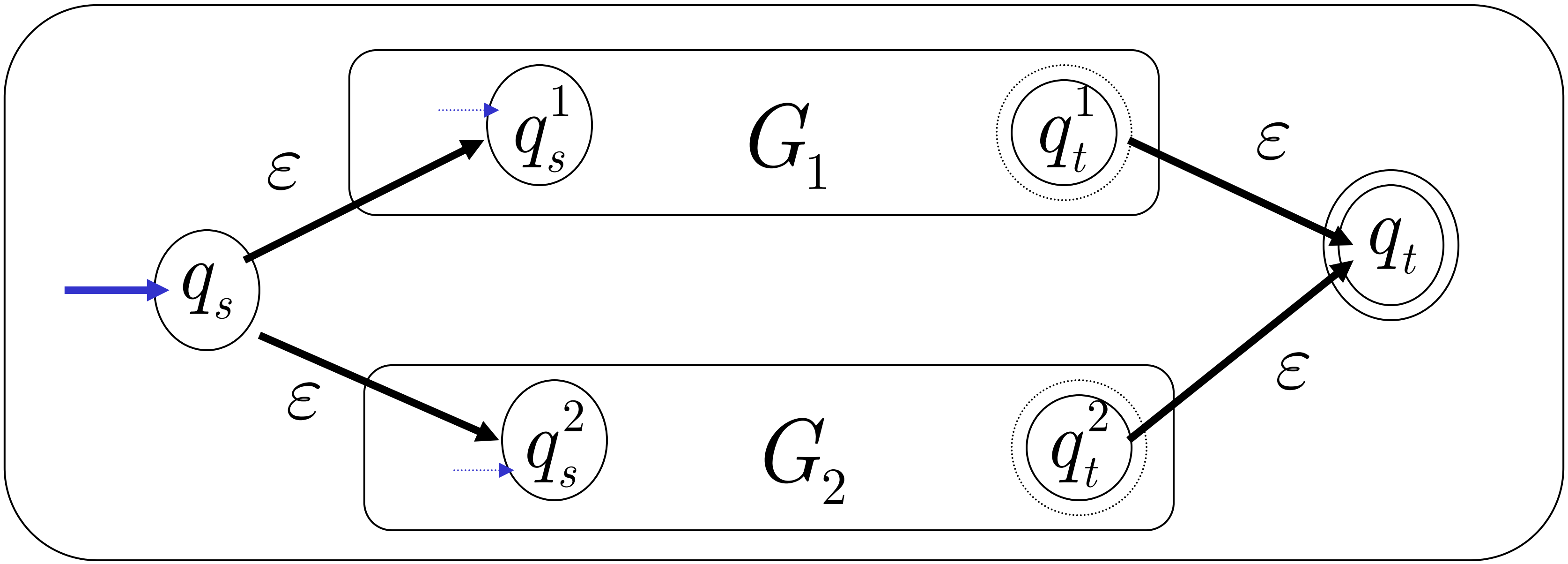
演算数が$m+1$である正規表現 r を考える。

正規表現の定義より、3つの場合が存在すr。

（1）場合1
$r = r_1 + r_2$の形にできるとき。

ここで、 r_1, r_2 は、正規表現だが、
演算数はm 以下である。
よって、 $L(r_1) = L(G_1), L(r_2) = L(G_2)$
となる2つのGNFA G_1, G_2 が存在する。

これらを用いて $L(r)$ を受理するGNFA G を以下のように構成できる。



G

(2)場合2

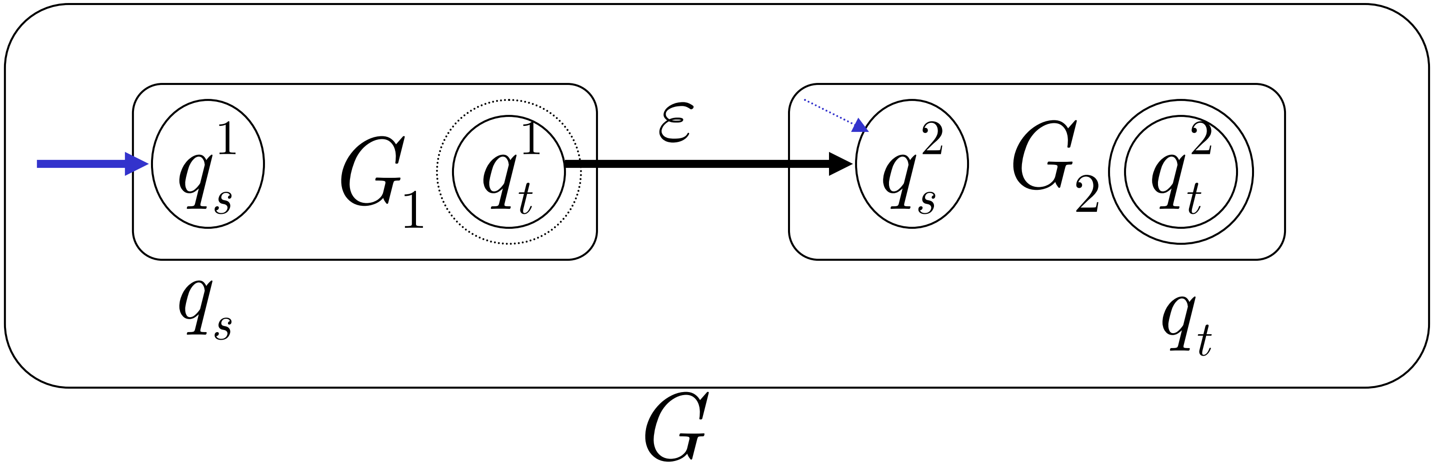
$r = r_1 r_2$ の形にできるとき。

ここで、r_1, r_2 は、正規表現だが、
演算数は m 以下である。

よって、 $L(r_1) = L(G_1), L(r_2) = L(G_2)$

となる2つのGNFA G_1, G_2 が存在する。

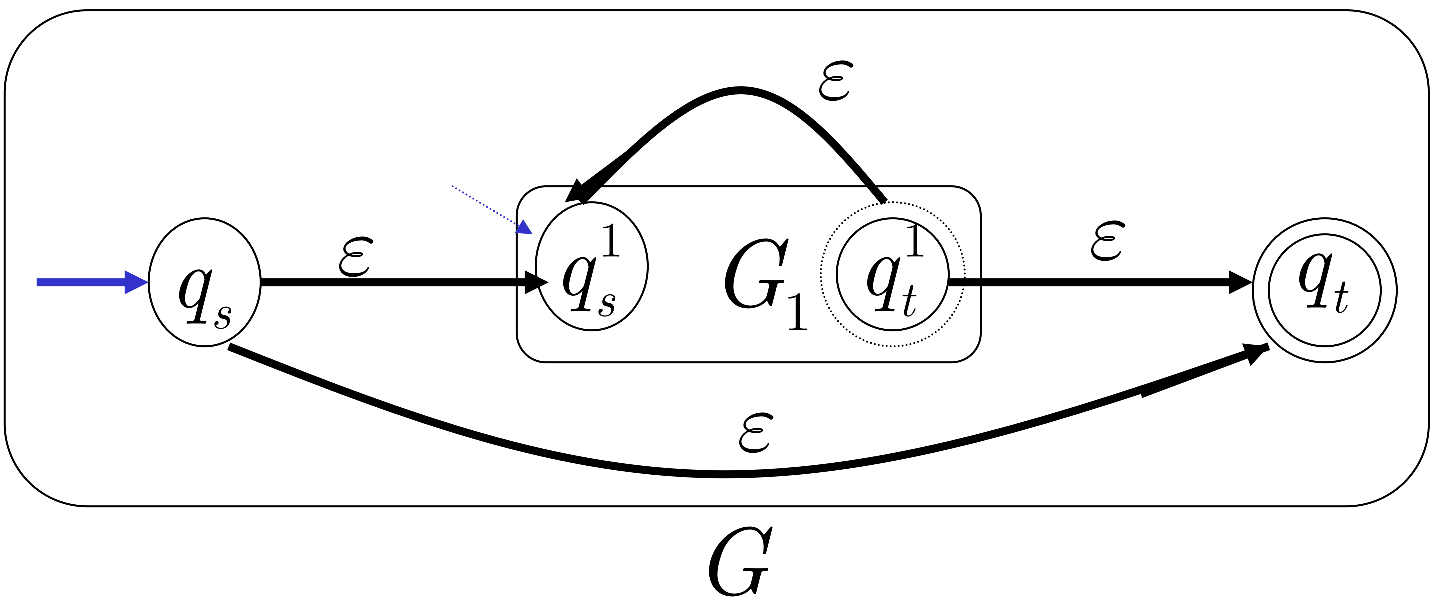
これらを用いて $L(r)$ を受理するGNFA G を
以下のように構成できる。



(3)場合3

$r = r_1^*$ の形にできるとき。

ここで、 r_1 は、正規表現だが、
演算数は m 以下である。
よって、$L(r_1) = L(G_1)$ なるGNFA G_1 が存在する。
これらを用いて $L(r)$ を受理するGNFA G を
以下のように構成できる。



以上より、
任意の正規表現はGNFAに変換可能である。

QED

例

$\Sigma = \{0,1\}$ 上の正規表現 $r = 01^* + 1$ を受理する GNFA G を構成する。

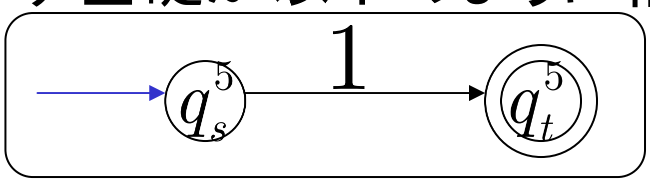
$r_1 = 01^*, r_2 = 1$ とおけば、 $r = r_1 + r_2$ である。

$r_3 = 0, r_4 = 1^*$ とおけば、 $r_1 = r_3 r_4$ である。

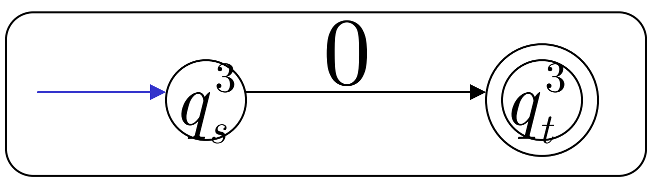
$r_5 = 1$ とおけば、 $r_4 = r_5^*$ である。

よって、まず基礎が以下のように構成できる。

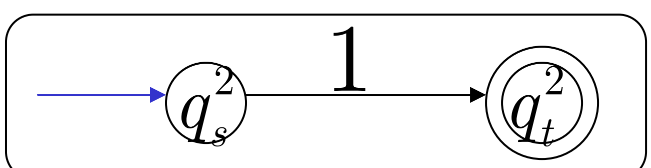
G_5



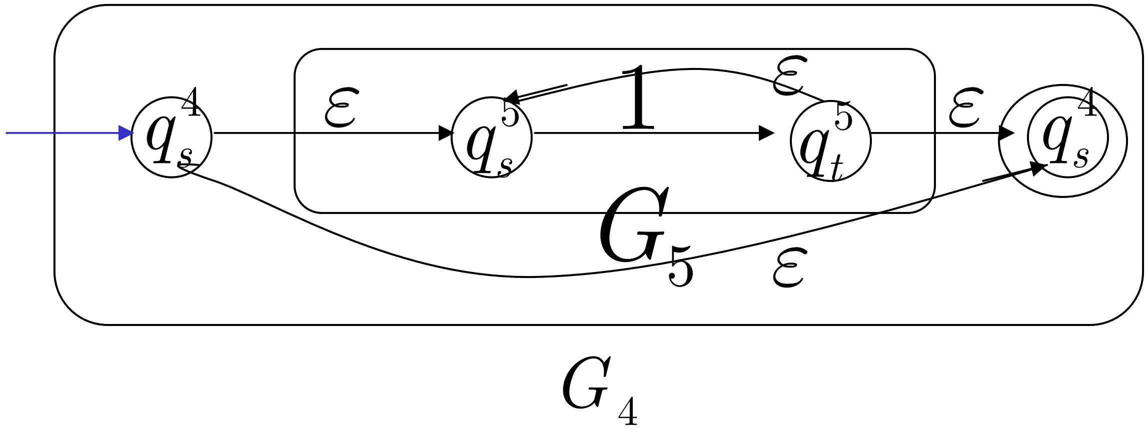
G_3



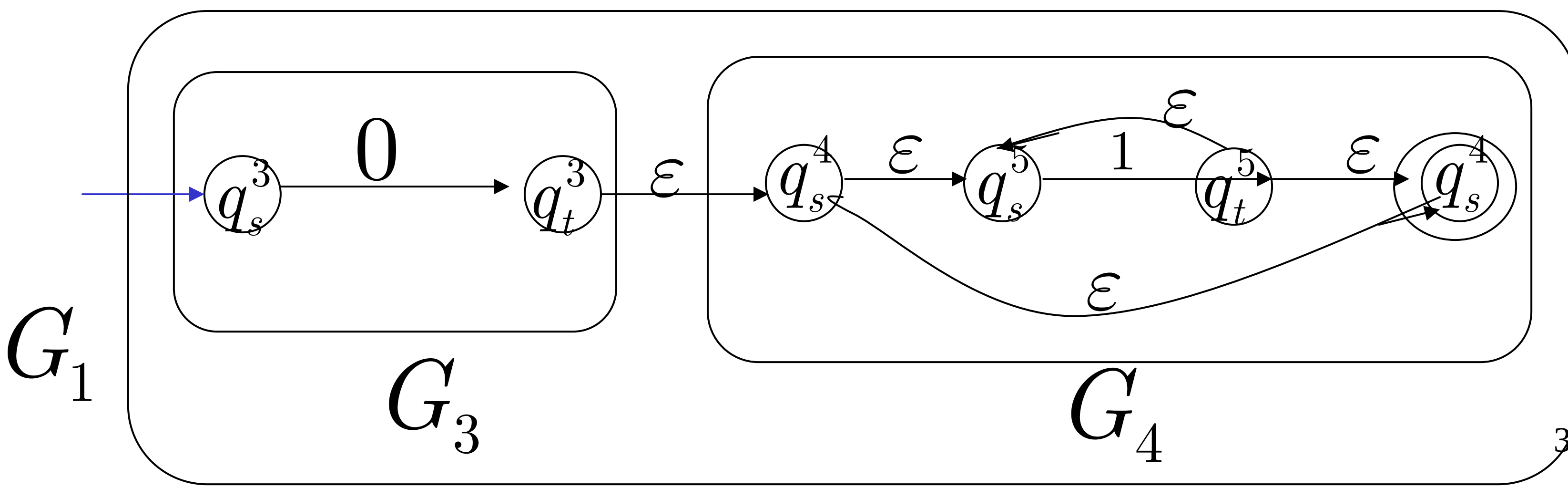
G_2



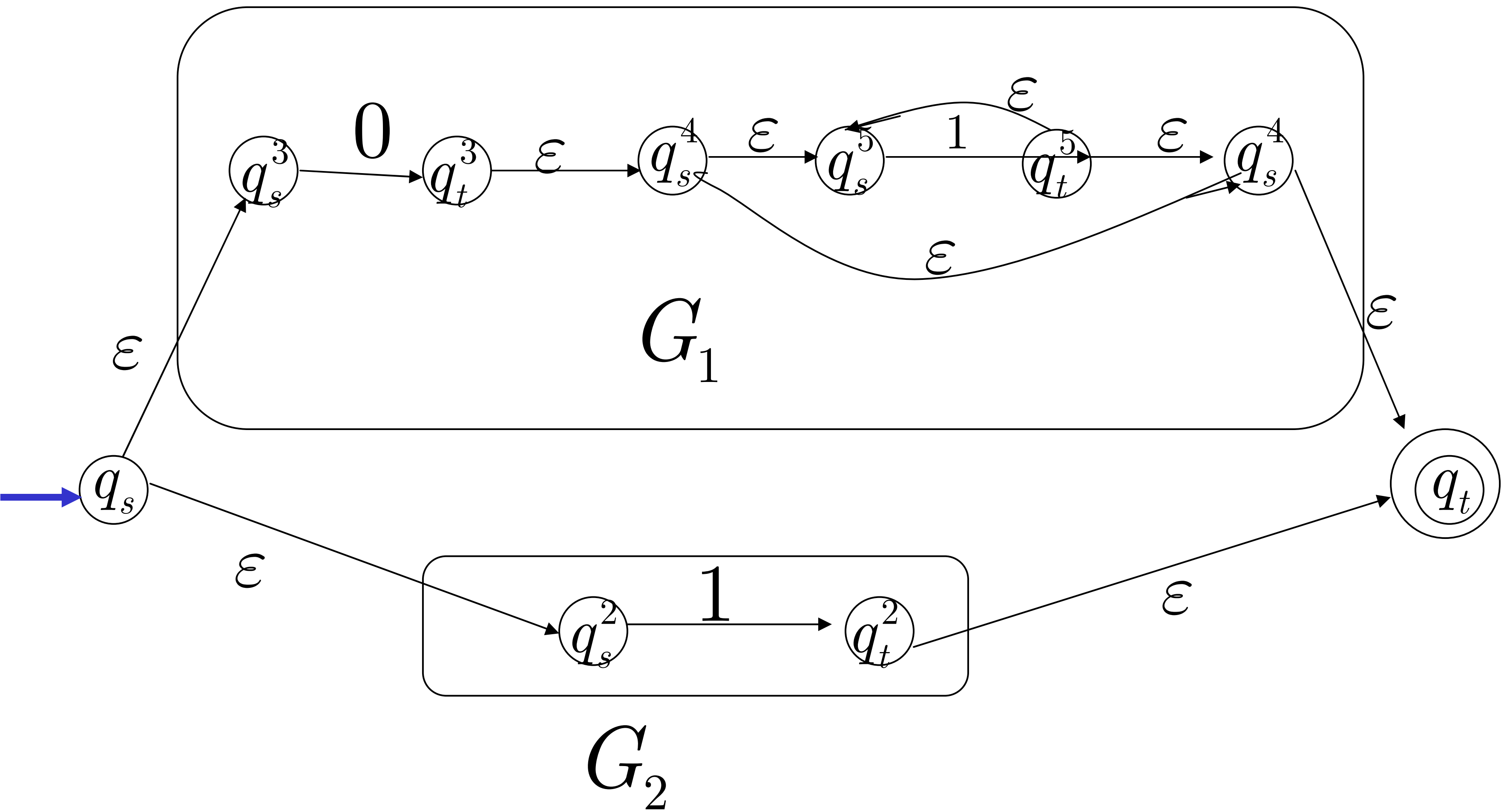
$r_4 = r_5^{\ *}$ を受理するGNFA G_4 は、G_5を用いて



$r_1 = r_3 r_4$ を受理するGNFA G_1 は、G_4を用いて



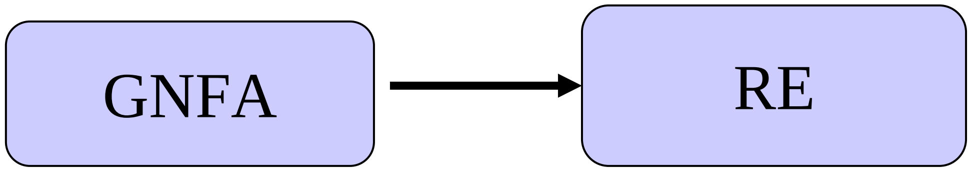
$r = r_1 + r_2$ を受理するGNFA G は、G_1を用いて



練習

$\Sigma = \{0, 1\}$ 上の正規表現 $r = (10+0)^*$ を受理する GNFA G を構成せよ。

GNFAから正規表現へ



方針:
任意のGNFA $G = (Q, \Sigma, \delta, q_s, q_t)$ に対して、

$$L(G) = L(r)$$

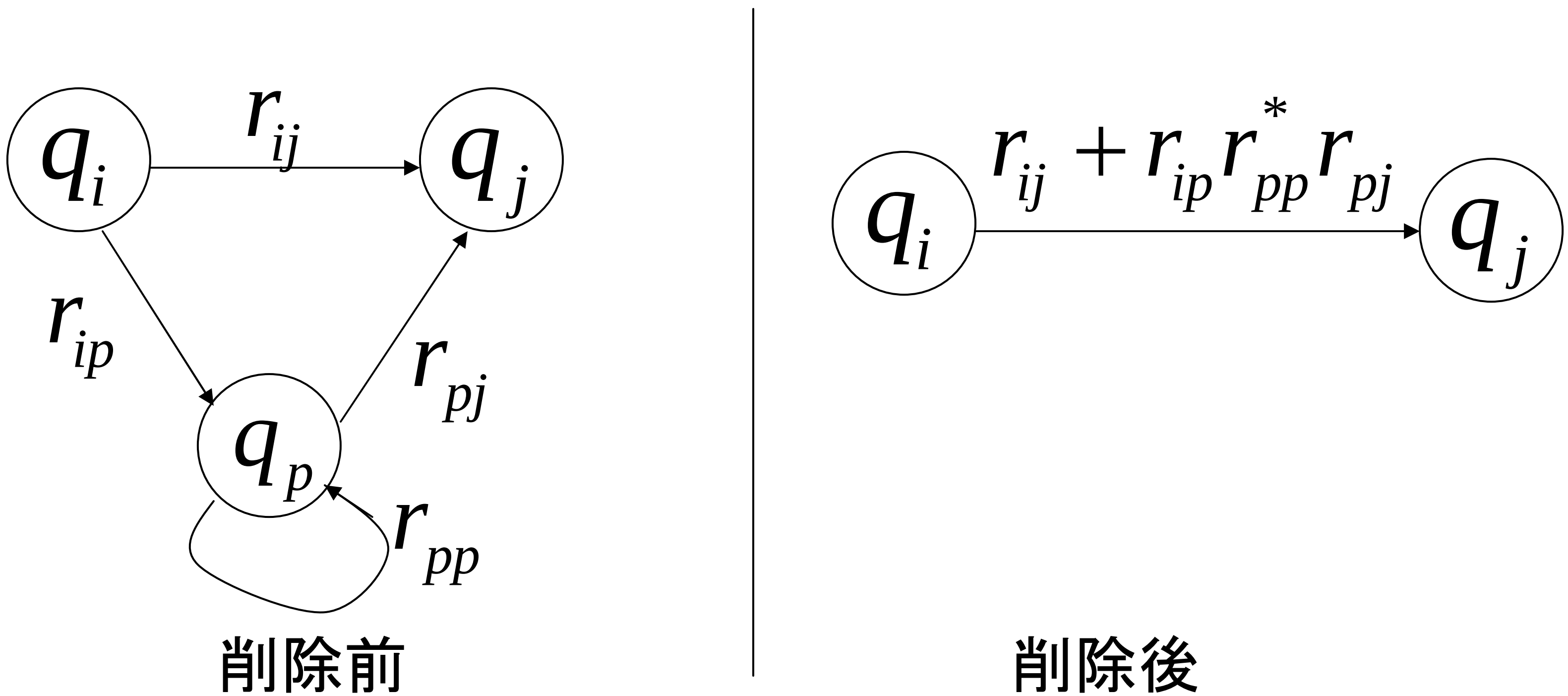
となるような r を導く。

Gの状態数を減少させることにより、
最終的には2状態のGNFAを構成していく。

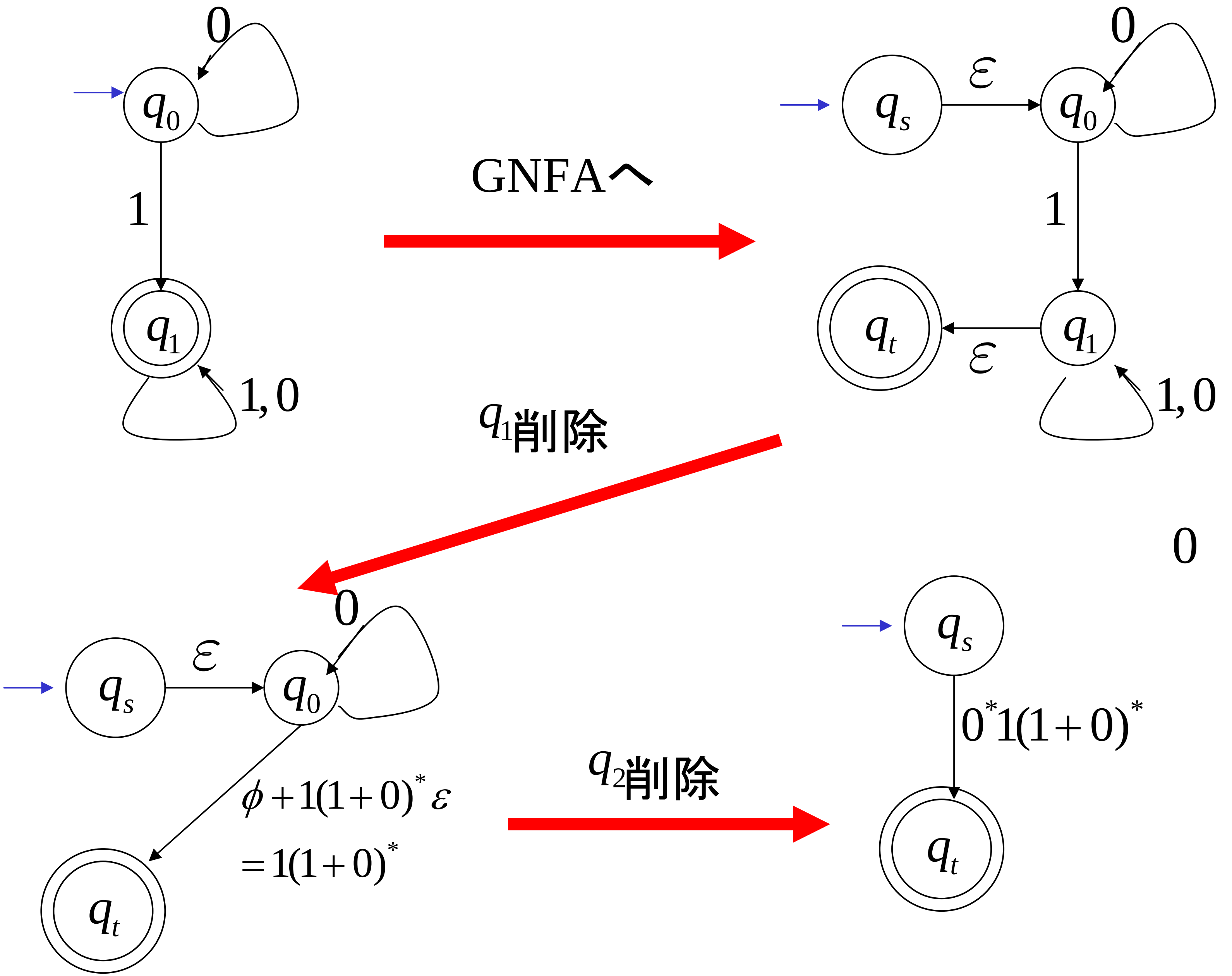
状態の削除法

1．削除する状態 $q_p \in Q$ を決める。

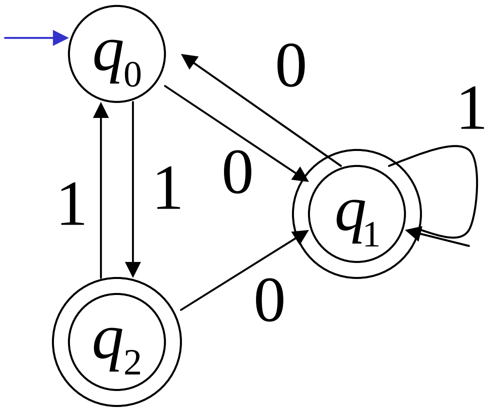
2. すべての組 $q_i, q_j \in Q - \{q_p\}$ に対して，
次のようなアークを構成する。



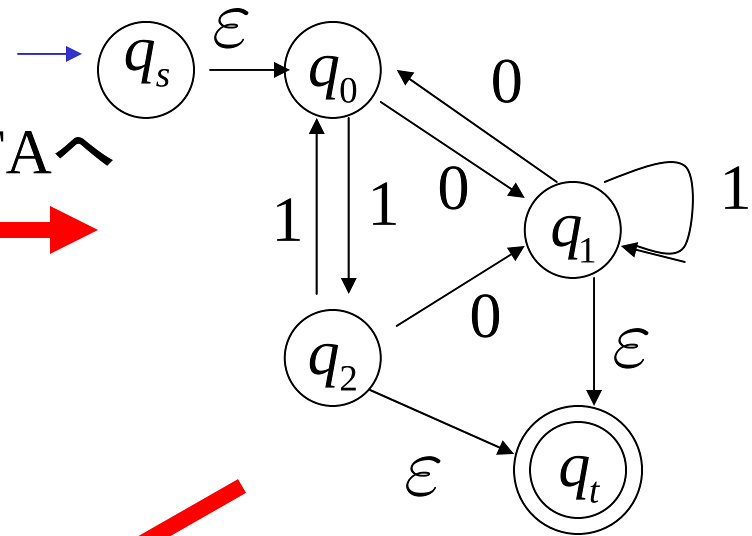
例


0
q_0
1
q_1
1, 0
GNFAへ
q_s
ε
0
q_0
1
q_t
ε
q_1
1, 0
q_1削除
q_s
ε
0
q_0
$\phi + 1(1+0)^* \varepsilon$
$= 1(1+0)^*$
q_t
q_2削除
0
q_s
$0^* 1(1+0)^*$
q_t

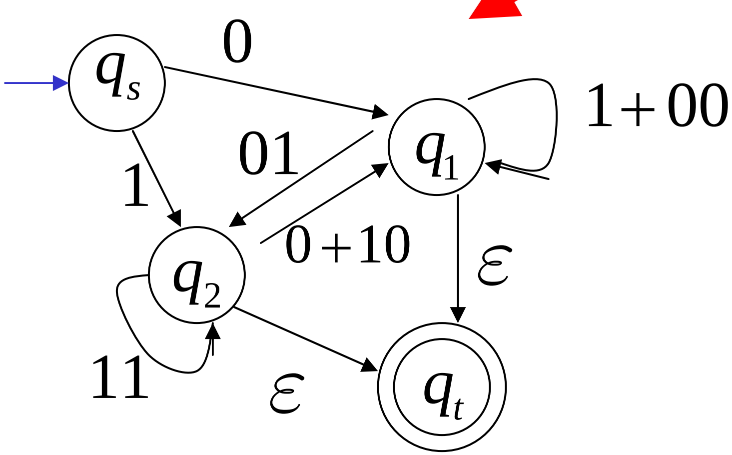
例2



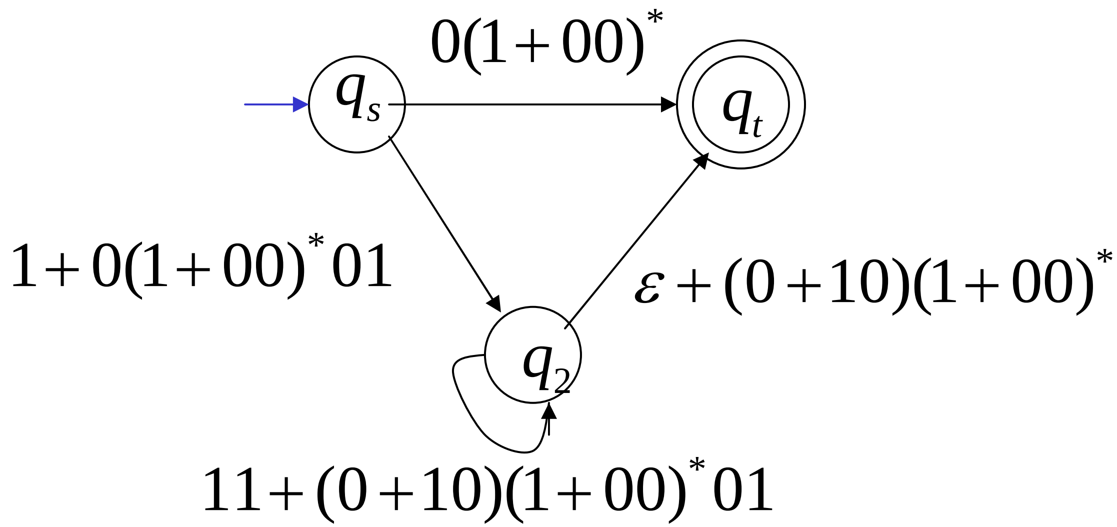
GNFAへ



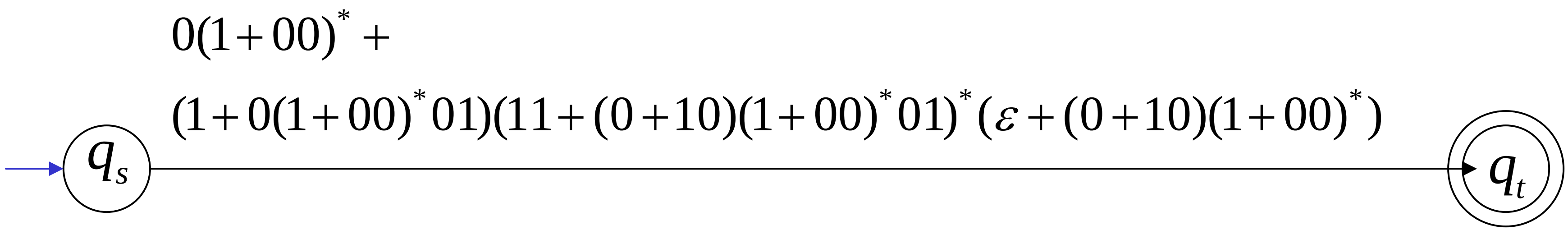
q_0削除、複数のアーク
を生成することに注意。



q_1　削除

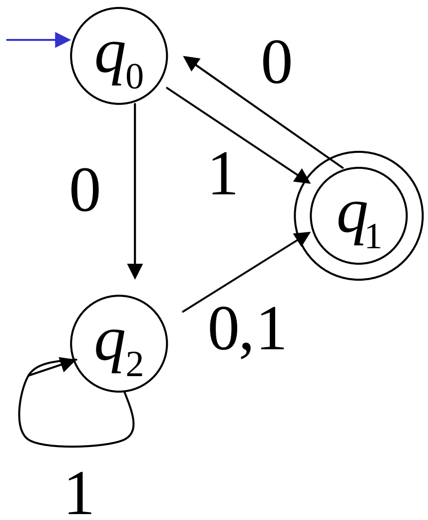

$0(1+00)^*$
q_s
q_t
$1+0(1+00)^*01$
$\varepsilon+(0+10)(1+00)^*$
q_2
$11+(0+10)(1+00)^*01$

q_2 削除


$0(1+00)^*+$
$(1+0(1+00)^*01)(11+(0+10)(1+00)^*01)^*(\varepsilon+(0+10)(1+00)^*)$
q_s
q_t

練習

次のDFAが受理する言語を正規表現で示せ。



２－２.　正規言語の性質

ここでは、DFAの限界を示す。

実際、次のような言語は、正規言語ではない。

$$B = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

$$C = \{w \mid w\text{は０と１を同じ数だけ含む文字列}\}$$

正規言語でないことを示すための、有用な補題（定理）がある。

ポンピング補題

ポンピング補題

Aが正規言語であるならば、ある数 p （ポンピング長）が存在して、p より長い任意の文字列 $s \in A$ に対して、次を満たすように s を

$$s = xyz$$

に分割できる。

1. 各 $i \geq 0$ について、$xy^i z \in A$
2. $|y| \geq 1, (y \neq \varepsilon)$
3. $|xy| \leq p$

ポンピング補題の意味

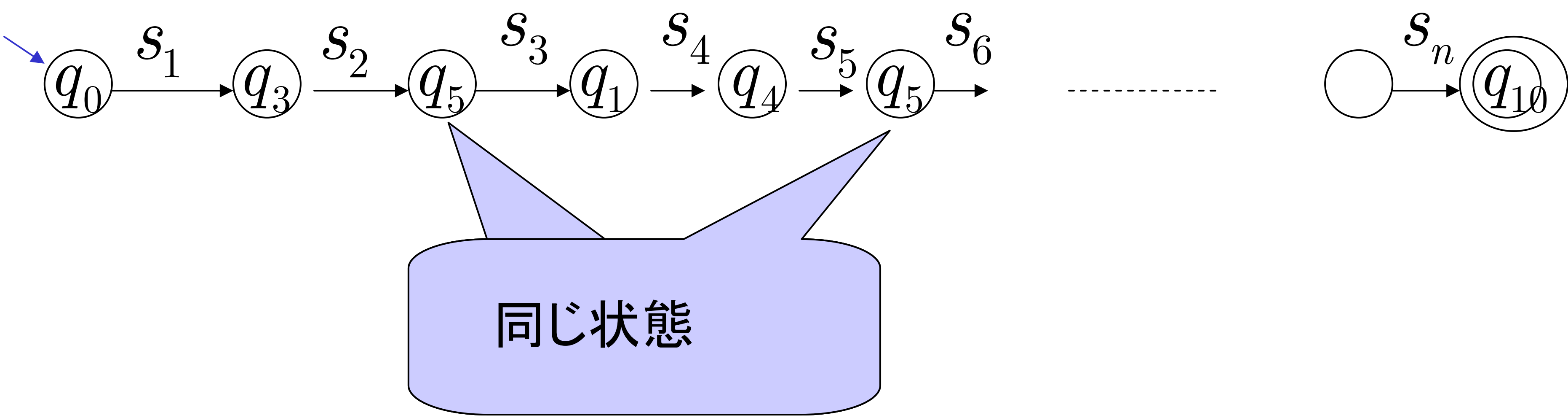
正規言語 A を認識するDFAを $M_A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ とする。
実は、 p を M_A の状態数($p = |Q|$)とすると補題が成り立つ。

入力が状態数を超えているとき、必ず状態遷移中に
2度以上おとづれる状態が存在しているはずである。

(このことは、鳩ノ巣原理と呼ばれます。)

例えば、 $s = s_1 s_2 s_3 s_4 \cdots s_n \in A$ による M_A の
状態遷移が $q_0 q_3 q_5 q_1 q_4 q_5 \cdots q_{10}$ であったとする。
ここで、 $q_{10} \in F$ としています。

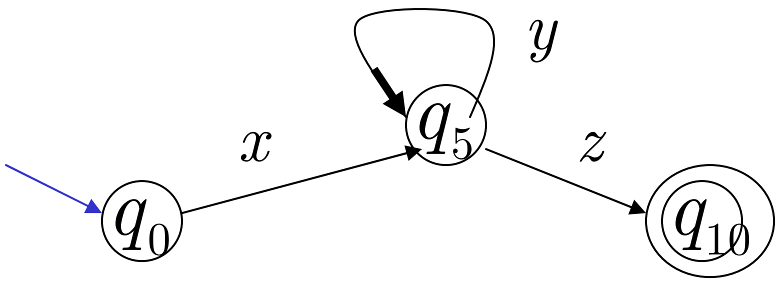
例の状態遷移



この例では、

$x = s_1 s_2 \quad y = s_3 s_4 s_5 \quad z = s_6 \cdots s_n$

とすればよい。このとき、 $xy^i z \in A$ である。



ポンピング補題の証明

正規言語 A を認識するDFAを $M_A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ とし、
$p = |Q|$ とする。

また、$n \geq p$ とし、 $s = s_1 s_2 s_3 s_4 \cdots s_n \in A$ とする。

s を入力としたときの、 M_A の状態遷移の系列を
$r_1 r_2 \cdots r_{n+1}$とする。すなわち、$1 \leq i \leq n$ に対して、
$r_{i+1} = \delta(r_i, s_i)$

である。

鳩ノ巣原理より、列 $r_1 r_2 \cdots r_{n+1}$の最初の $p+1$ 個の中に
同じ状態が2回以上現れる。
2回現れた状態の一回目を r_j とし、
2回目を r_k とする。

ここで、

$$x = s_1 \cdots s_{j-1} \qquad y = s_j \cdots s_{k-1} \qquad z = s_k \cdots s_n$$

とおく。

このとき、補題の3条件をすべて満たしている。

$\mathcal{QED}$

非正規な言語

次の言語は正規言語ではない。

$$B = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

$$B = \{w \mid w\text{は 0 の列のあとに同じ長さの 1 の列が続く}\}$$

$$= \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, 00001111, \cdots\}$$

証明

ポンピング補題を用いて背理法で証明する。

Bは正規言語であると仮定する。（背理法の仮定）

Bは正規言語であるので、あるポンプ長 p が存在する。

$s = 0^p 1^p$ とする。

このとき、ポンピング補題より、
$s = xyz$
と分割できる。

このとき、 y として次の3つの場合が考えられる。

（1）0だけ　　（2）1だけ　　（3）0の列と1の列の連結

しかし、次のようにいずれの場合も矛盾が生じる。

（1）y が0だけのとき

このとき、ポンピング補題より、
$xy^2z = xyyz$ も B に含まれなければならない。
（$xyyz \in B$ ）
しかし、$xyyz$ は0の数が多いので $xyyz \notin B$ であり、
矛盾が生じる。

（2） yが1だけのとき

（1）と同様に矛盾が導ける。

（3） yが0の列と1の列の連結のとき

$y = 0^j1^k$ とする。
このとき、$xyyz = x0^j1^k0^j1^kz$ であるが、
1の前に0があり $xyyz \notin B$ である。

以上、すべての場合で矛盾が生じるので、
Bは正規言語ではない。

$\mathcal{QED}$