2007年度
情報数理学

履修にあたって

2007年度
大学院奇数セメスター(前期)開講

教室: K336→大学院棟D416(次回から)

時限: 火曜日3時限(12:50－14:20)

担当
草苅良至

講義予定

○計算機のいろいろな理論モデル → 言語理論

○計算の限界
○問題の難しさ → 計算量理論

○現実問題と計算 → アルゴリズム論

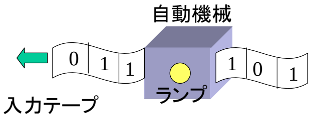
参考書

- M. Sipser著、
「計算理論の基礎」、
共立出版、1997,ISBN:4-320-02948-8
- 岩間一雄、
「オートマトン・言語と計算理論」
コロナ社、2003、ISBN:4-339-01821-X
- 岩間一雄、
「アルゴリズム理論入門」
昭晃堂、2001、ISBN:4-7856-3125-2
- ホップクロフト、ウルマン、
「オートマトン・言語理論・計算論 I,II」
サイエンス社、1984,ISBN:4-7819-0374-6,4-7819-0432-7
- M.R. Garey and D.S.Johnson,
"Computers And Intractability:A guide to the Theoryof NP-Completeness,"
Freeman,1979,ISBN:0-7167-1045-5
- V.V.ヴィジラーニ著、浅野　孝夫訳、
「近似アルゴリズム」、
シュプリンガー・フェアラーク東京、2002、
ISBN:4-431-70991-6

1. オートマトンと正規表現

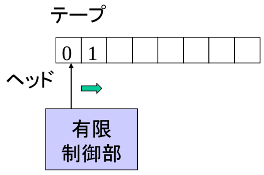
1－1. 有限オートマトン

メモリがほとんどなく、
「はい」と「いいえ」しか答えられない計算機を考える。



入力テープを"一度だけ"走査したあと、
「はい」ならランプ点灯
「いいえ」ならランプ消灯。
このような自動機械を(有限)オートマトンという。

有限オートマトンの概略



オートマトンを定める要素
- 入力テープ
  - テープに書ける文字
- 有限制御部
  - 内部状態
  - 初期状態
  - 状態変化
  - 受理かどうかの判断

有限オートマトンの数学的定義

有限オートマトンは、$M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ の5項組で与えられる。
ここで、

1. Q は有限集合で、状態を表す。
2. Σ は有限集合で、入力記号の集合を表す。
3. δ は $Q\times\Sigma$ から Q への写像（$\delta:Q\times\Sigma\rightarrow Q$）で、状態遷移を表す。$\delta$ を状態遷移関数という。
4. $q_0\in Q$ は、初期状態を表す。
5. $F\subseteq Q$ は受理状態の集合を表す。

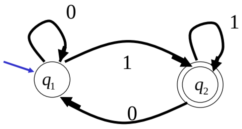
とする。

有限オートマトンの図式表現（状態遷移図）

有限オートマトンは、状態遷移図で表現できる。

オートマトン例

M_1



このオートマトンの形式的定義（数学的定義）は、

$$M_1=(\{q_1,q_2\},\{0,1\},\delta,q_1,\{q_2\})$$

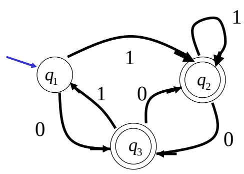
であり、δ は次の状態遷移表により定義される。

δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

練習

次のオートマトンの数学的表現を与えよ。

M



1－2. 言語

ここで、計算機で扱える対象について再考する。

計算機が扱える対象は、$\{0,1\}$で表された数と考えがちである。
しかし、$\{0,1\}$の並びを一種の言語とみなすこともできる。

以下では、言語の数学的定義を与える。

任意の有限集合をアルファベットという。
アルファベットの要素を文字という。
アルファベットの任意の列を文字列という。
文字列の集合を、（アルファベット上の）言語という。

言語の例1

アルファベット例：

$$\Sigma_1=\{\mathrm{a,b,c,d},\cdots,\mathrm{z},(\text{スペース}),(\text{ピリオド})\}$$

Σ_1 上の文字列例：

$\boxed{\mathrm{a}}$ $\boxed{\mathrm{aa}}$ $\boxed{\mathrm{ab}}$ $\boxed{\mathrm{book}}$

Σ_1 上の言語例：

$L_1=\{w\mid w\text{はaで始まる文字列}\}$

$\quad=\{\mathrm{a,aa,ab,ac,ad},\cdots,\mathrm{a\ ,a.,aaa},\cdots\}$

$L_2=\{$this,that,is,a,pen,this is a pen.,that is a pen.$\}$

$L_3=\{\text{全ての英単語}\}$

$L_4=\{(\Sigma_1\text{以外の記号を無視した）全ての英文}\}$

言語の例2

アルファベット例：

$\Sigma_2 = \{0,1\}$

Σ_2 上の文字列例：

$\boxed{0}$ $\boxed{00}$ $\boxed{001}$ $\boxed{1000100011111110111}$

Σ_2 上の言語例：

$$L_3 = \{w \mid w\text{は1で終わる文字列}\} = \{1,01,11,001,011,101,111,\cdots\}$$

$$L_4 = \{w \mid w\text{は1が奇数個である文字列}\} = \{1,01,10,001,010,100,111,0000001000101,\cdots\}$$

言語に関する諸概念1

ここでは、文字列に関する諸概念の定義を与える。

文字列の長さ：

文字列wに含まれる文字数を、文字列wの長さといい、$|w|$ という記号で表す。

空列：

長さが0の文字列を空列といい、記号εで表す。

連結：

文字列 xの後ろに文字列yを繋げてえられる文字列をxとyの連結といい次のような記号で表す。

$$xy \qquad x \circ y \qquad x^k = \underbrace{xx\cdots x}_{k}$$

例

$\Sigma_2 = \{0,1\}$ 上の文字列を考える。

$w = 01, x = 011, y = 01011$ とする。

このとき、次式が成り立つ。

$$|w| = 2, |x| = 3, |y| = 5$$

$$w^0 = x^0 = y^0 = \varepsilon$$

$$|\varepsilon| = 0$$

$$y = wx \qquad y \neq xw$$

文字列の連結演算は、交換不可

$$w^2 = 0101, w^3 = 010101$$

言語に関する諸概念2

ここでは、言語に関する諸概念の定義を与える。

A と B を言語とする。

言語の和集合(和集合演算)：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A\text{または}x \in B\}$$

言語の連結(連結演算)：

$$A \circ B = AB = \{xy \mid x \in A\text{かつ}y \in B\}$$

言語の閉包(スター演算)：

$$A^* = \{x_1 x_2 \cdots x_k \mid k \geq 0\text{かつ、}x_1, x_2, \cdots, x_k \in A\}$$

例

$\Sigma_2 = \{0,1\}$ 上の言語を考える。

$L_1 = \{10,1\}$, $L_2 = \{011,11\}$ とする。

このとき、次式が成り立つ。

$$L_1 \cup L_2 = \{10,1,011,11\}$$

$$L_1 \circ L_2 = \{10011,1011,111\}$$

$$L_1^0 = \{\varepsilon\}, \quad L_1^1 = L_1 = \{10,1\},$$

$$L_1^2 = L_1 L_1 = \{1010,101,110,11\}$$

$$L_1^* = \{\varepsilon,10,1,1010,101,110,11,101010,\cdots\}$$

要素の無い言語と空列だけの言語

要素の無い言語と空列だけの言語は異なる。

$L_1 = \{\} = \phi, L_2 = \{\varepsilon\}$ とする。

このとき、

$$L_1 \neq L_2$$

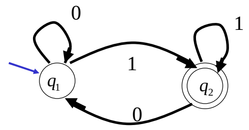
である。

オートマトンと言語

オートマトンによって受理される入力の集合は、
入力記号 Σ 上の言語になっている。

オートマトン例

M_1



このオートマトン M_1 で受理される言語を
$L(M_1)$ と書く。

例えば、

$L(M_1) = \{w \mid w$は1で終わる文字列$\}$

である。

練習

次の言語を受理するオートマトン M を作成せよ。

$L(M) = \{w \mid w$は0で終わる文字列$\}$

オートマトンは、状態遷移図および、形式的定義の両方で
示す事。

1ー3. 非決定性(有限)オートマトン

オートマトンでは、入力記号にしたがって、
状態遷移は一意に定められていた。

この制限を緩和した計算機モデルが考えられる。

非決定性オートマトンとは、同じ入力に対して複数の遷移を
ゆるす"オートマトン"である。

これに対して、同じ入力に対して、一つの遷移しか
おこなえない"オートマトン"を決定性オートマトン
という。

オートマトンの略記

決定性オートマトンは、英語では、
Deterministic Finite Automaton
であり、
DFA
と略記される。

非決定性オートマトンは、英語では、
Non-determinisc Finite Automaton
であり、
NFA
と略記される。

NFAの形式的定義

非決定性有限オートマトンは、$N=(Q,\Sigma,\delta',q_0,F)$ の5項組
で与えられる。ここで、

1. Q は有限集合で、状態を表す。
2. Σ は有限集合で、入力記号の集合を表す。
3. δ' は $Q\times\Sigma$ から $\mathcal{P}(Q)$ への写像

$$\delta' : Q\times\Sigma \to \mathcal{P}(Q)$$

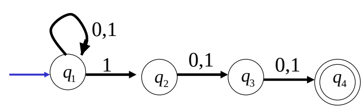
で、状態遷移を表す。δ を状態遷移関数という。

4. $q_0 \in Q$ は、初期状態を表す。
5. $F \subseteq Q$ は受理状態の集合を表す。

とする。

NFAの状態遷移図

N_1



このオートマトンの形式的定義(数学的定義)は、

$$N_1 = (\{q_1,q_2,q_3,q_4\},\{0,1\},\delta,q_1,\{q_4\})$$

であり、δ は次の状態遷移表により定義される。

δ	0	1
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1,q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$
q_4	ϕ	ϕ

このオートマトン N_1 で受理される言語 $L(N_1)$ は、

$$L(N_1)=\left\{w \,\middle|\, \begin{array}{l} w\text{は最後から３文字目が,} \\ 1\text{である文字列} \end{array}\right\}$$

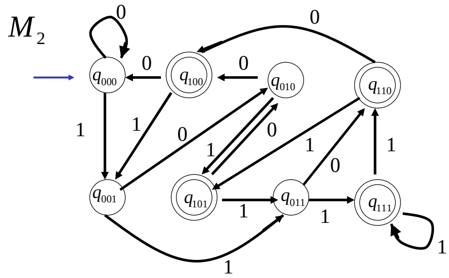
である。

実は、非決定性オートマトンが受理する言語と同じ言語を受理する決定性オートマトンが常に存在する。

モデル自体の能力に差がない。
あとで、証明する。

言語 $\left\{w \,\middle|\, \begin{array}{l} w\text{は最後から３文字目が,} \\ 1\text{である文字列} \end{array}\right\}$ を受理する

DFA M_2 を示す。



練習

$\Sigma=\{0,1\}$ 上の

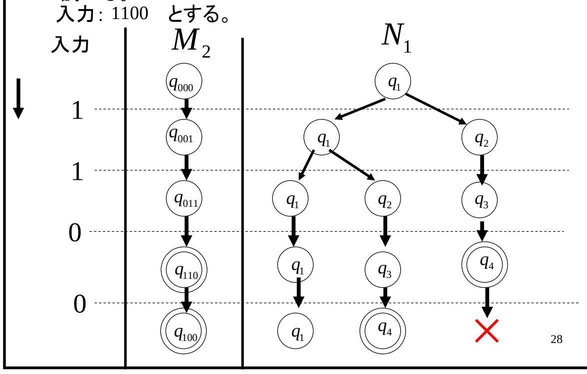
言語 $\left\{w \,\middle|\, \begin{array}{l} w\text{は最後から2文字目が,} \\ 1\text{である文字列} \end{array}\right\}$

を受理する非決定性オートマトンと決定性オートマトンを示せ。

DFAとNFAの状態遷移

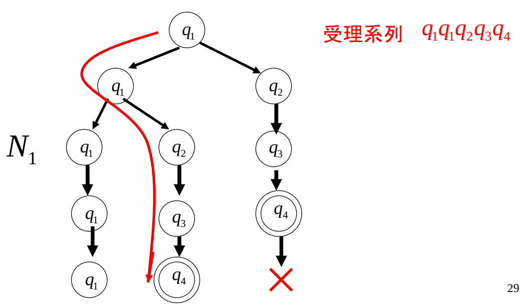
M_2 と N_1 を例にして、DFAとNFAの状態遷移を調べる。

入力: 1100 とする。



NFAの受理

NFAの受理とは、
入力系列を受理する遷移の系列が存在する
ことである。



練習

M_2 と N_1 に対して、入力1011の状態遷移を木によって示し、受理か不受理かを確認せよ。

1－4. 正規表現(正則表現)

DFAで受理できる言語に対して、正規表現と呼ばれる別の表現法が知られている。

正規表現の形式的定義

Σ をアルファベットとする。
Σ 上の正規表現とは、下記の4つにより帰納的に定義される。

1. ϕ で、その表す集合は、空集合である。
2. ε で、その表す集合は、$\{\varepsilon\}$ である。
3. Σ の各元 a に対して、a は正規表現で、その表す集合は、$\{a\}$である。
4. r と s がそれぞれ言語 R と言語 S を表す正規表現のとき、$(r+s),(rs),(r^*)$ は正規表現で、それぞれ $R\cup S, RS, R^*$ を表す。

31

正規演算の優先順位

正規表現の演算記号に優先順位をつけることによって、括弧を省略できる。

$$+<\circ<^*<()$$

通常は、上のように優先順位があると考えて、不必要な括弧は省略する。

32

例

アルファベット $\Sigma=\{0,1\}$ 上の正規表現を考える。

$\varepsilon=\{\varepsilon\},\ 0=\{0\},\ 1=\{1\},\ 01=\{01\},\ 10=\{10\}$

$1\varepsilon=\{1\},\ 0+1=\{0,1\},\ 01+10=\{01,10\},$

$(1+0)(01+10)=\{101,110,001,010\}$

$1^*=\{\varepsilon,1,11,111,1111,11111,\cdots\}$
$01^*=\{0,01,011,0111,01111,011111,\cdots\}$

$$\begin{aligned}\Sigma^* &=(0+1)^*\\ &=\{0,1\}^*\\ &=\{\varepsilon,0,1,00,01,10,11,000,001,\cdots\}\\ &=\{\text{全ての２進数}\}\end{aligned}$$

33

練習

アルファベットを$\Sigma=\{a,b,c,d,\cdots,z\}$ とする。
このとき、
次の正規表現で表される言語に含まれる文字列をいくつか示し、その直感的な意味を述べよ。

（1） m(a+e)n

（2） bo^*

（3） $a\Sigma^*$

（4） $\Sigma^*b\Sigma^*$

（5） $(a+b+c)^*$

34

正規表現の応用

UNIXシェルでは、正規表現で引数を指定できる。
ただし、UNIXの正規表現は、UNIX独特のものなので注意する。

＊:任意の文字列を表す。Σ^*

＋:一文字以上の文字列。$\Sigma^*-\{\varepsilon\}$

$[c_1c_2\cdots c_n]$: c_1 から c_n までのいずれかの1文字 $(c_1+c_2+\cdots+c_n)$

$[c_1-c_n]$: c_1 から c_n までのいずれかの1文字 $(c_1+c_2+\cdots+c_n)$

35

例

```
~$ls *.c
average.c   hello.c     sort.c      sum.c
~$ls [ab]*
average     average.c
~$ls [h-s]*.c
hello.c     sort.c      sum.c
~$
```

*.cは.cで終わる文字列。
（拡張子で区別すると、特定種類のファイルだけを指定できる。）

[ab]*はaかbで始まる文字列。
（長いファイル名を一括して扱える。）

[h-s]*.cはhからsのどれかの文字で始まり、.cで終わる文字列。
（組み合わせてファイルを絞り込める。）

36

1－5.　拡張NFA

DFA、NFA共に、入力記号１文字に対して、
１つの遷移を行っていた。
この制限を緩和した計算機モデルが考えられる。

拡張NFAとは、遷移のラベルとして正規表現を許すNFAである。

拡張NFA：Generalized Non-deterministic finite Automaton
なのでGNFAと略する。

GNFAの形式的定義

GNFAは、$G=(Q,\Sigma,\delta,q_s,q_a)$ の５項組
で与えられる。ここで、

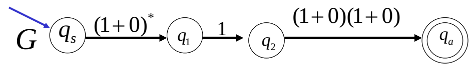
1. Q は有限集合で、状態を表す。
2. Σ は有限集合で、入力記号の集合を表す。
3. δ は $(Q-\{q_a\})\times(Q-\{q_s\})$ から $\mathcal{R}$ への写像

   $\delta:(Q-\{q_a\})\times(Q-\{q_s\})\to\mathcal{R}$

   で、状態遷移を表す。δ を状態遷移関数という。
   ただし、$\mathcal{R}$ は Σ 上の正規表現すべてからなる集合
   (Σ 上の正規言語)を表す。
4. $q_s\in Q$ は、初期状態を表す。
5. $q_a\in Q$ は受理状態を表す。

とする。

GNFAの状態遷移図



このオートマトンの形式的定義(数学的定義)は、

$$G=(\{q_1,q_2,q_s,q_a\},\{0,1\},\delta,q_s,q_a)$$

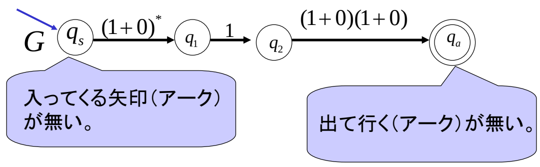
であり、δ は次の状態遷移表により定義される。

δ	q_1	q_2	q_a
q_s	$(1+0)^*$	ϕ	ϕ
q_1	ϕ	1	ϕ
q_2	ϕ	ϕ	$(1+0)(1+0)$

GNFAに関する注意

初期状態 q_s には、他の状態からの遷移がない。
受理状態 q_a からは、他の状態への遷移がない。

初期状態と、受理状態はそれぞれ1つづつしかない。
特に、受理状態が1つであることに注意する。



練習

$\Sigma=\{0,1\}$ 上の

言語 $\left\{ w \,\middle|\, \begin{array}{l} w\text{は最後から4文字目が,}\\ 0\text{である文字列}\end{array}\right\}$

を受理する4状態の拡張NFAを状態遷移図と、
形式的定義の両方で示せ。