2007年度
情報数理学

履修にあたって

2007年度
大学院奇数セメスター（前期）開講

教室：K336→大学院棟D４１６（次回から）

時限：火曜日３時限（12:50－14:20）

担当
草苅良至

講義予定

○計算機のいろいろな理論モデル → 言語理論

○計算の限界

○問題の難しさ

→ 計算量理論

○現実問題と計算 → アルゴリズム論

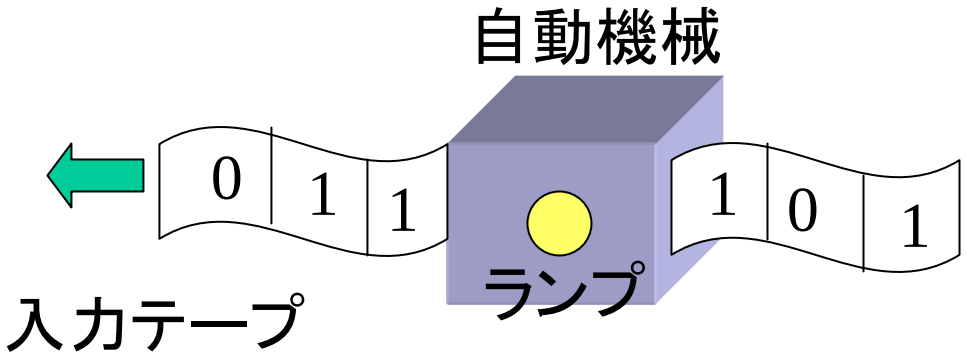
参考書

- M. Sipser著、
「計算理論の基礎」、
共立出版、1997,ISBN:4-320-02948-8
- 岩間一雄、
「オートマトン・言語と計算理論」
コロナ社、2003、ISBN：4-339-01821-X
- 岩間一雄、
「アルゴリズム理論入門」
昭晃堂、2001、ISBN：4-7856-3125-2
- ホップクロフト、ウルマン、
「オートマトン・言語理論・計算論 I,II」
サイエンス社、1984,ISBN:4-7819-0374-6,4-7819-0432-7
- M.R. Garey and D.S.Johnson,
"Computers And Intractability:A guide to the Theoryof NP-Completeness,"
Freeman,1979,ISBN:0-7167-1045-5
- V.V.ヴィジラーニ著、浅野　孝夫訳、
「近似アルゴリズム」、
シュプリンガー・フェアラーク東京、２００２、
ISBN:4-431-70991-6

1. オートマトンと正規表現

1－1. 有限オートマトン

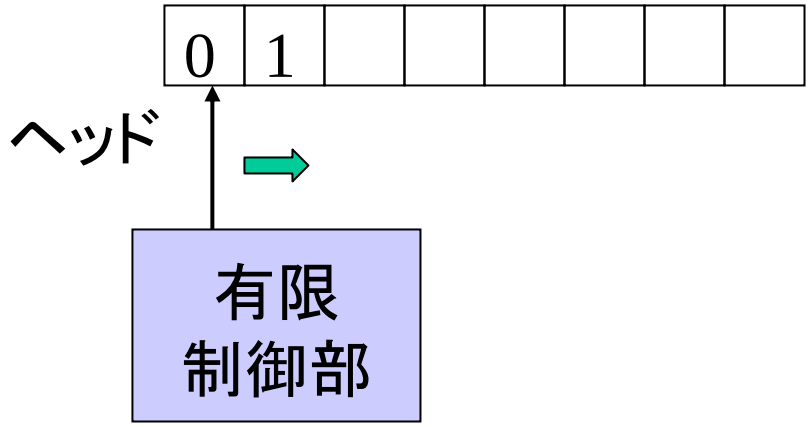
メモリがほとんどなく、
「はい」と「いいえ」しか答えられない計算機を考える。



入力テープを”一度だけ“走査したあと、
「はい」ならランプ点灯
「いいえ」ならランプ消灯。
このような自動機械を(有限）オートマトンという。

有限オートマトンの概略

テープ



オートマトンを定める要素

入力テープ

テープに書ける文字

有限制御部

内部状態

初期状態

状態変化

受理かどうかの判断

有限オートマトンの数学的定義

有限オートマトンは、$M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ の5項組で与えられる。
ここで、

1. Q は有限集合で、状態を表す。
2. Σ は有限集合で、入力記号の集合を表す。
3. δ は $Q\times\Sigma$ から Q への写像($\delta:Q\times\Sigma\to Q$)で、
   状態遷移を表す。δ を状態遷移関数という。
4. $q_0\in Q$ は、初期状態を表す。
5. $F\subseteq Q$ は受理状態の集合を表す。

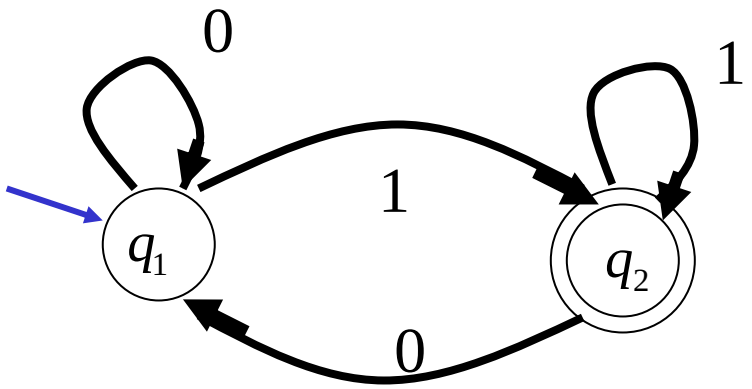
とする。

有限オートマトンの図式表現（状態遷移図）

有限オートマトンは、状態遷移図で表現できる。

オートマトン例

M_1



このオートマトンの形式的定義（数学的定義）は、

$$M_1 = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_2\})$$

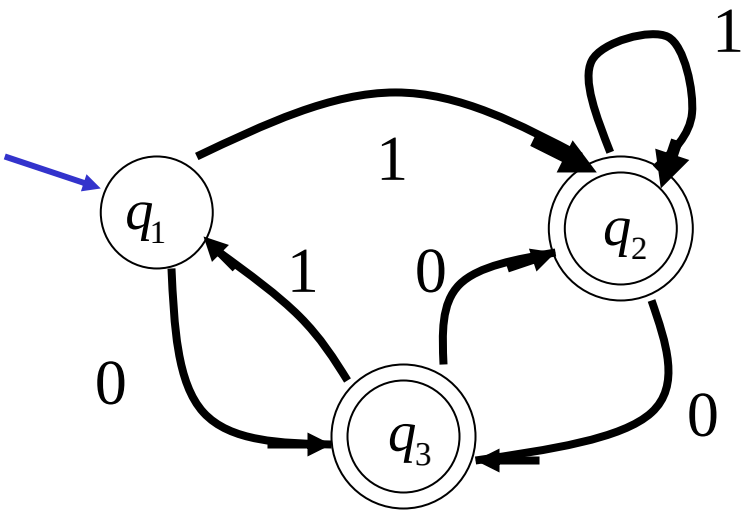
であり、δ は次の状態遷移表により定義される。

δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

練習

次のオートマトンの数学的表現を与えよ。

M



1－2. 言語

ここで、計算機で扱える対象について再考する。

計算機が扱える対象は、{0,1}で表された数と考えがちである。
しかし、{0,1}の並びを一種の言語とみなすこともできる。

以下では、言語の数学的定義を与える。

任意の有限集合をアルファベットという。
アルファベットの要素を文字という。
アルファベットの任意の列を文字列という。
文字列の集合を、（アルファベット上の）言語という。

言語の例1

アルファベット例:

$$\Sigma_1 = \{a,b,c,d,\cdots,z,(スペース),(ピリオド)\}$$

Σ_1 上の文字列例:

a　aa　ab　book

Σ_1 上の言語例:

L_1 $= \{w \mid w$はaで始まる文字列$\}$

$= \{a,aa,ab,ac,ad,\cdots,a\ ,a.,aaa,\cdots\}$

$L_2 = \{this,that,is,a,pen,this\ is\ a\ pen.,that\ is\ a\ pen.\}$

$L_3 = \{$全ての英単語$\}$

$L_4 = \{(\Sigma_1$以外の記号を無視した）全ての英文$\}$

言語の例2

アルファベット例:

$$\Sigma_2 = \{0,1\}$$

Σ_2 上の文字列例:

0	00	001	1000100011111110111

Σ_2 上の言語例:

$$L_3 = \{w \mid w\text{は1で終わる文字列}\}$$
$$= \{1, 01, 11, 001, 011, 101, 111, \cdots\}$$

$$L_4 = \{w \mid w\text{は1が奇数個である文字列}\}$$
$$= \{1, 01, 10, 001, 010, 100, 111, 000000100010 1, \cdots\}$$

言語に関する諸概念1

ここでは、文字列に関する諸概念の定義を与える。

文字列の長さ:

文字列wに含まれる文字数を、文字列wの長さといい、

$|w|$ という記号で表す。

空列:

長さが0の文字列を空列といい、記号εで表す。

連結:

文字列 xの後ろに文字列 y を繋げてえられる文字列を

xと y の連結といい次のような記号で表す。

$$xy \qquad x \circ y \qquad x^k = \underbrace{xx \cdots x}_{k}$$

例

$\Sigma_2 = \{0,1\}$ 上の文字列を考える。

$w = 01, x = 011, y = 01011$ とする。

このとき、次式が成り立つ。

$$|w| = 2, |x| = 3, |y| = 5$$

$$w^0 = x^0 = y^0 = \varepsilon$$

$$|\varepsilon| = 0$$

$$y = wx \quad y \neq xw$$

文字列の連結演算は、交換不可

$$w^2 = 0101, w^3 = 010101$$

言語に関する諸概念2

ここでは、言語に関する諸概念の定義を与える。

A と B を言語とする。

言語の和集合(和集合演算):

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{または} x \in B\}$$

言語の連結(連結演算):

$$A \circ B = AB = \{xy \mid x \in A \text{かつ} y \in B\}$$

言語の閉包(スター演算):

$$A^* = \{x_1 x_2 \cdots x_k \mid k \geq 0 \text{かつ、} x_1, x_2, \cdots, x_k \in A\}$$

例

$\Sigma_2 = \{0,1\}$ 上の言語を考える。

$L_1 = \{10,1\},\ L_2 = \{011,11\}$ とする。

このとき、次式が成り立つ。

$$L_1 \cup L_2 = \{10,1,011,11\}$$

$$L_1 \circ L_2 = \{10011,1011,111\}$$

$$L_1^{\ 0} = \{\varepsilon\},\quad L_1^{\ 1} = L_1 = \{10,1\},$$

$$L_1^{\ 2} = L_1 L_1 = \{1010,101,110,11\}$$

$$L_1^{\ *} = \{\varepsilon,10,1,1010,101,110,11,101010,\cdots\}$$

要素の無い言語と空列だけの言語

要素の無い言語と空列だけの言語は異なる。

$L_1 = \{\} = \phi, L_2 = \{\varepsilon\}$　とする。

このとき、

$$L_1 \neq L_2$$

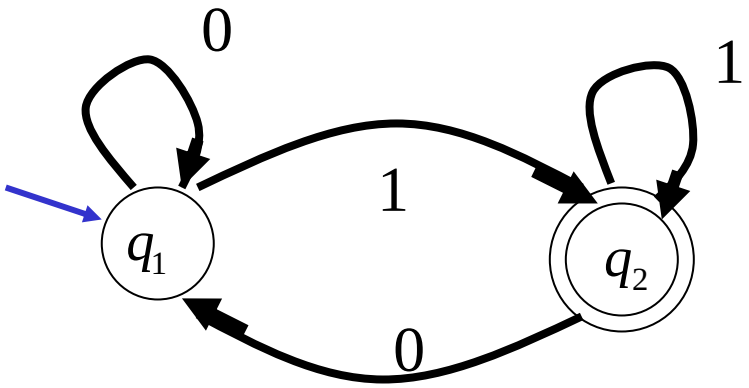
である。

オートマトンと言語

オートマトンによって受理される入力の集合は、
入力記号 Σ 上の言語になっている。

オートマトン例

M_1



このオートマトン M_1 で受理される言語を
$L(M_1)$ と書く。

例えば、

$$L(M_1) = \{w \mid w\text{は}1\text{で終わる文字列}\}$$

である。

練習

次の言語を受理するオートマトン M を作成せよ。

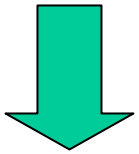
$$L(M) = \{w \mid w\text{は}0\text{で終わる文字列}\}$$

オートマトンは、状態遷移図および、形式的定義の両方で示す事。

1－3. 非決定性(有限)オートマトン

オートマトンでは、入力記号にしたがって、
状態遷移は一意に定められていた。

この制限を緩和した計算機モデルが考えられる。



非決定性オートマトンとは、同じ入力に対して複数の遷移をゆるす”オートマトン”である。

これに対して、同じ入力に対して、一つの遷移しかおこなえない”オートマトン”を決定性オートマトンという。

オートマトンの略記

決定性オートマトンは、英語では、
Deterministic Finite Automaton
であり、
DFA
と略記される。

非決定性オートマトンは、英語では、
Non-determinisc Finite Automaton
であり、
NFA
と略記される。

NFAの形式的定義

非決定性有限オートマトンは、$N=(Q,\Sigma,\delta',q_0,F)$ の5項組で与えられる。ここで、

1. Q は有限集合で、状態を表す。
2. Σ は有限集合で、入力記号の集合を表す。
3. δ' は $Q\times\Sigma$ から $\mathcal{P}(Q)$ への写像

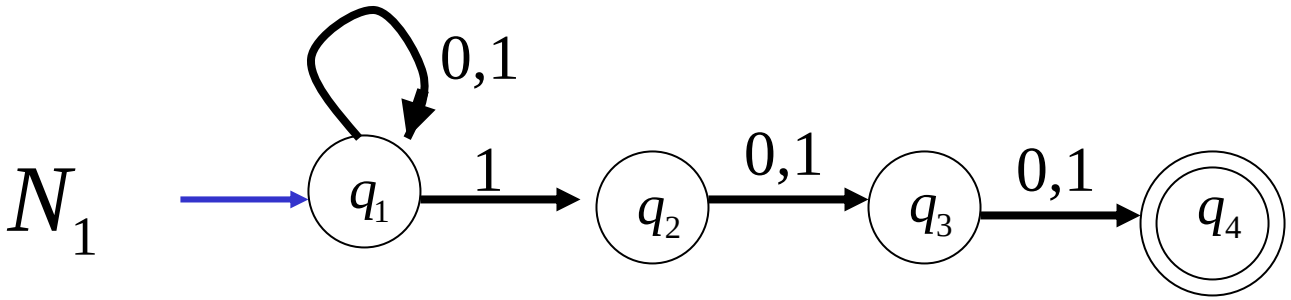
$$\delta':Q\times\Sigma\to\mathcal{P}(Q)$$

で、状態遷移を表す。δ を状態遷移関数という。

4. $q_0\in Q$ は、初期状態を表す。
5. $F\subseteq Q$ は受理状態の集合を表す。

とする。

NFAの状態遷移図



このオートマトンの形式的定義（数学的定義）は、

$$N_1 = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \delta, q_1, \{q_4\})$$

であり、δ は次の状態遷移表により定義される。

δ	0	1
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$
q_4	ϕ	ϕ

このオートマトン N_1で受理される言語 $L(N_1)$ は、

$$L(N_1) = \left\{ w \middle| \begin{array}{l} w\text{は最後から}3\text{文字目が,} \\ 1\text{である文字列} \end{array} \right\}$$

である。

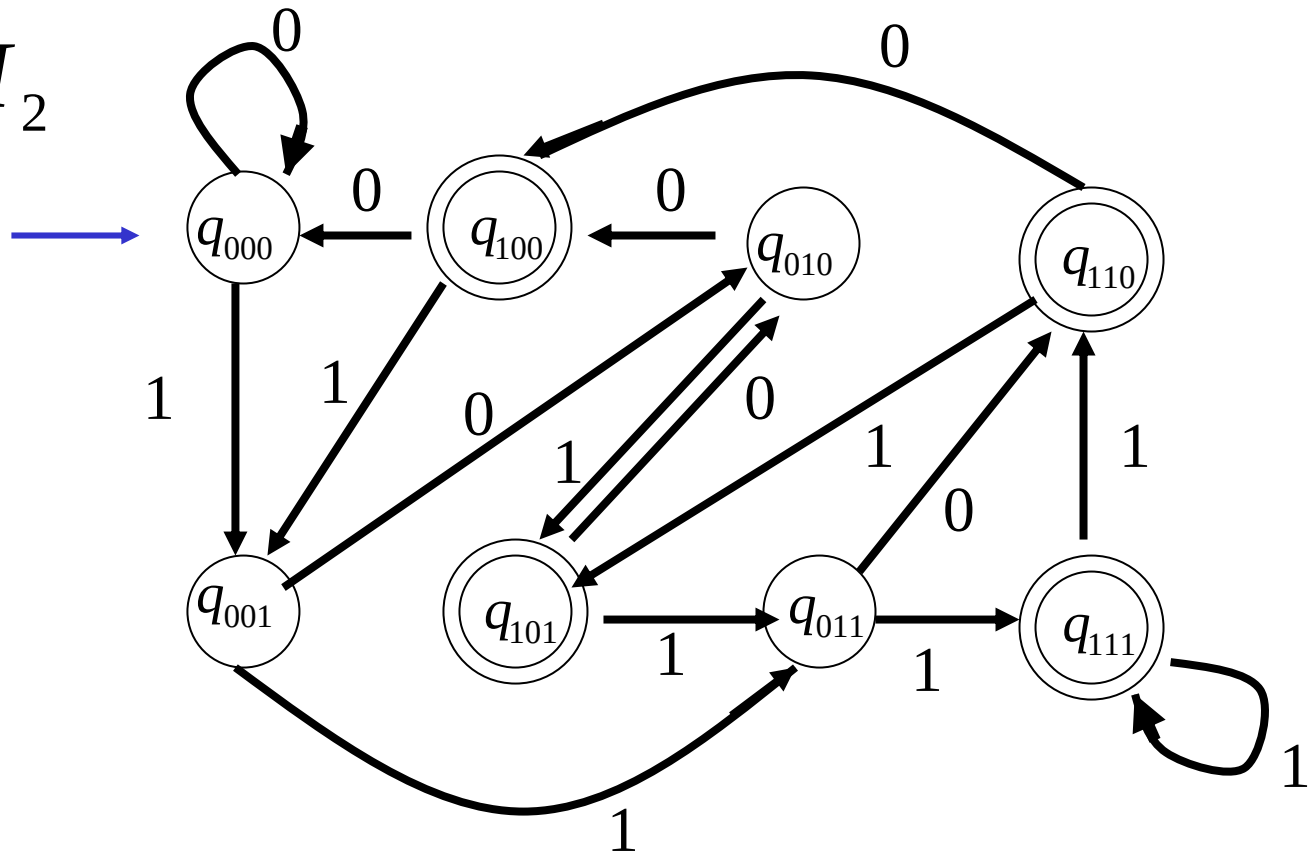
実は、非決定性オートマトンが受理する言語と同じ言語を
受理する決定性オートマトンが常に存在する。

モデル自体の能力に差がない。
あとで、証明する。

言語 $\left\{ w \middle| \begin{array}{l} w\text{は最後から３文字目が,} \\ 1\text{である文字列} \end{array} \right\}$ を受理する

DFA M_2 を示す。

M_2



練習

$\Sigma = \{0,1\}$ 上の

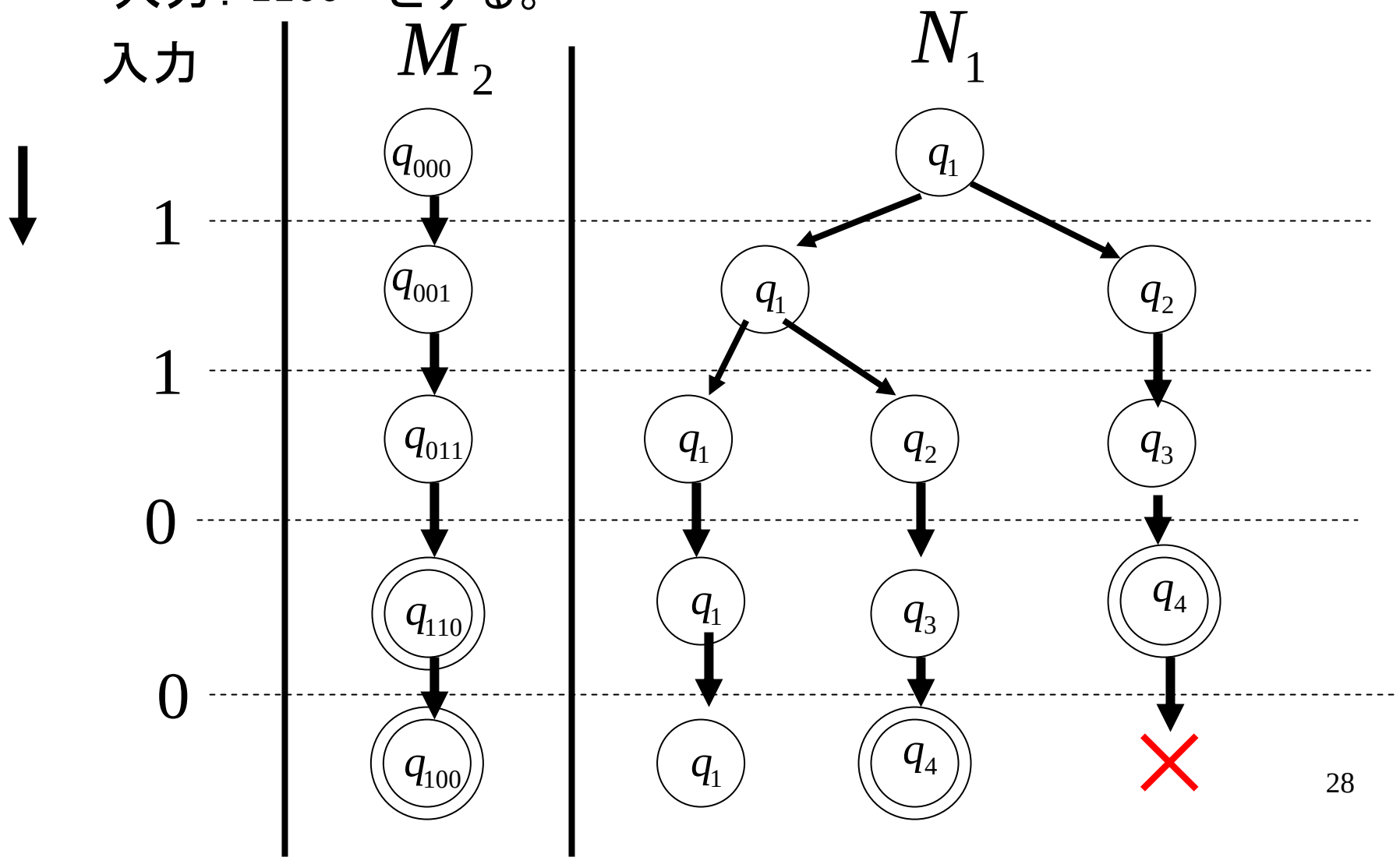
$$\text{言語} \left\{ w \middle| \begin{array}{l} w\text{は最後から2文字目が,} \\ 1\text{である文字列} \end{array} \right\}$$

を受理する非決定性オートマトンと決定性オートマトンを示せ。

DFAとNFAの状態遷移

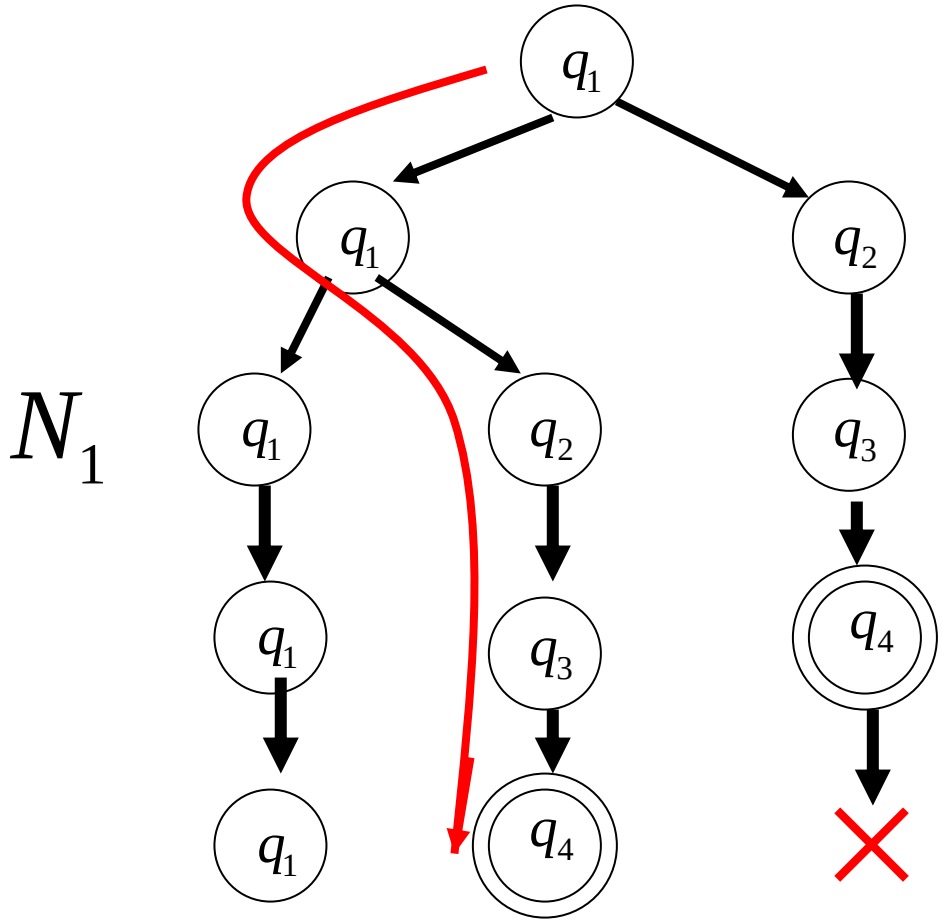
M_2 と N_1 を例にして、DFAとNFAの状態遷移を調べる。

入力: 1100 とする。



NFAの受理

NFAの受理とは、
入力系列を受理する遷移の系列が存在する
ことである。



受理系列　$q_1q_1q_2q_3q_4$

練習

M_2 と N_1 に対して、入力1011の状態遷移を木によって示し、受理か不受理かを確認せよ。

1－4. 正規表現(正則表現)

DFAで受理できる言語に対して、正規表現と呼ばれる
別の表現法が知られている。

正規表現の形式的定義

$\sum$ をアルファベットとする。

$\sum$ 上の正規表現とは、下記の4つにより帰納的に定義される。

1. ϕ で、その表す集合は、空集合である。
2. ε で、その表す集合は、$\{\varepsilon\}$ である。
3. $\sum$ の各元 a に対して、 a は正規表現で、
   その表す集合は、$\{a\}$である。
4. r と s がそれぞれ言語 R と言語 S を表す正規表現
   のとき、$(r+s),(rs),(r^*)$ は正規表現で、それぞれ
   $R \cup S, RS, R^*$ を表す。

正規演算の優先順位

正規表現の演算記号に優先順位をつけることによって、
括弧を省略できる。

$$+ < \circ < {}^{*} < ()$$

通常は、上のように優先順位があると考えて、
不必要な括弧は省略する。

例

アルファベット $\Sigma = \{0,1\}$　上の正規表現を考える。

$$\varepsilon = \{\varepsilon\},\ 0 = \{0\},\ 1 = \{1\},\ 01 = \{01\},\ 10 = \{10\}$$

$$1\varepsilon = \{1\},\ 0+1 = \{0,1\},\ 01+10 = \{01,10\},$$

$$(1+0)(01+10) = \{101,110,001,010\}$$

$$1^* = \{\varepsilon,1,11,111,1111,11111,\cdots\}$$

$$01^* = \{0,01,011,0111,01111,011111,\cdots\}$$

$$\Sigma^* = (0+1)^*$$

$$= \{0,1\}^*$$

$$= \{\varepsilon,0,1,00,01,10,11,000,001,\cdots\}$$

$$= \{\text{全ての２進数}\}$$

練習

アルファベットを$\Sigma = \{a,b,c,d,\cdots,z\}$　とする。
このとき、
次の正規表現で表される言語に含まれる文字列を
いくつか示し、その直感的な意味を述べよ。

（1）$m(a+e)n$

（2）bo^*

（3）$a\Sigma^*$

（4）$\Sigma^* b \Sigma^*$

（5）$(a+b+c)^*$

正規表現の応用

UNIXシェルでは、正規表現で引数を指定できる。
ただし、UNIXの正規表現は、UNIX独特のものなので注意する。

＊：任意の文字列を表す。Σ^*

＋：一文字以上の文字列。$\Sigma^* - \{\varepsilon\}$

$[c_1 c_2 \cdots c_n]$ ： c_1 から c_n までのいずれかの1文字

$(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$

$[c_1 - c_n]$ ： c_1 から c_n までのいずれかの1文字

$(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$

例

```
~$ls *.c
average.c   hello.c      sort.c       sum.c
~$ls [ab]*
average     average.c
~$ls [h-s]*.c
hello.c      sort.c       sum.c
~$
```

*.cは.cで終わる文字列。
（拡張子で区別すると、特定種類のファイルだけを指定できる。）

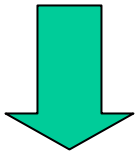
[ab]*はaかbで始まる文字列。
（長いファイル名を一括して扱える。）

[h-s]*.cはhからsのどれかの文字で始まり、.cで終わる文字列。
（組み合わせてファイルを絞り込める。）

1－5.　拡張NFA

DFA、NFA共に、入力記号1文字に対して、
1つの遷移を行っていた。

この制限を緩和した計算機モデルが考えられる。



拡張NFAとは、遷移のラベルとして正規表現を許すNFAである。

拡張NFA：Generalized Non-deterministic finite Automaton
なのでGNFAと略する。

GNFAの形式的定義

GNFAは、$G=(Q,\Sigma,\delta,q_s,q_a)$　の5項組
で与えられる。ここで、

1. Q は有限集合で、状態を表す。
2. Σ は有限集合で、入力記号の集合を表す。
3. δ は $(Q-\{q_a\})\times(Q-\{q_s\})$ から $\mathcal{R}$ への写像

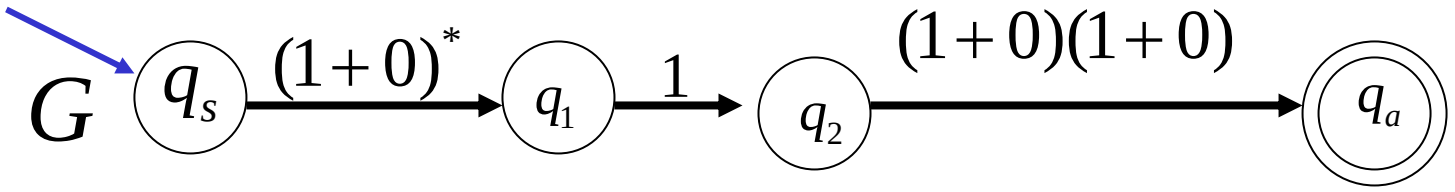
$$\delta:(Q-\{q_a\})\times(Q-\{q_s\})\to\mathcal{R}$$

で、状態遷移を表す。δ を状態遷移関数という。
ただし、 $\mathcal{R}$ は Σ 上の正規表現すべてからなる集合
（ Σ 上の正規言語）を表す。

4. $q_s\in Q$ は、初期状態を表す。
5. $q_a\in Q$ は受理状態を表す。

とする。

GNFAの状態遷移図



このオートマトンの形式的定義（数学的定義）は、

$$G = (\{q_1, q_2, q_s, q_a\}, \{0,1\}, \delta, q_s, q_a)$$

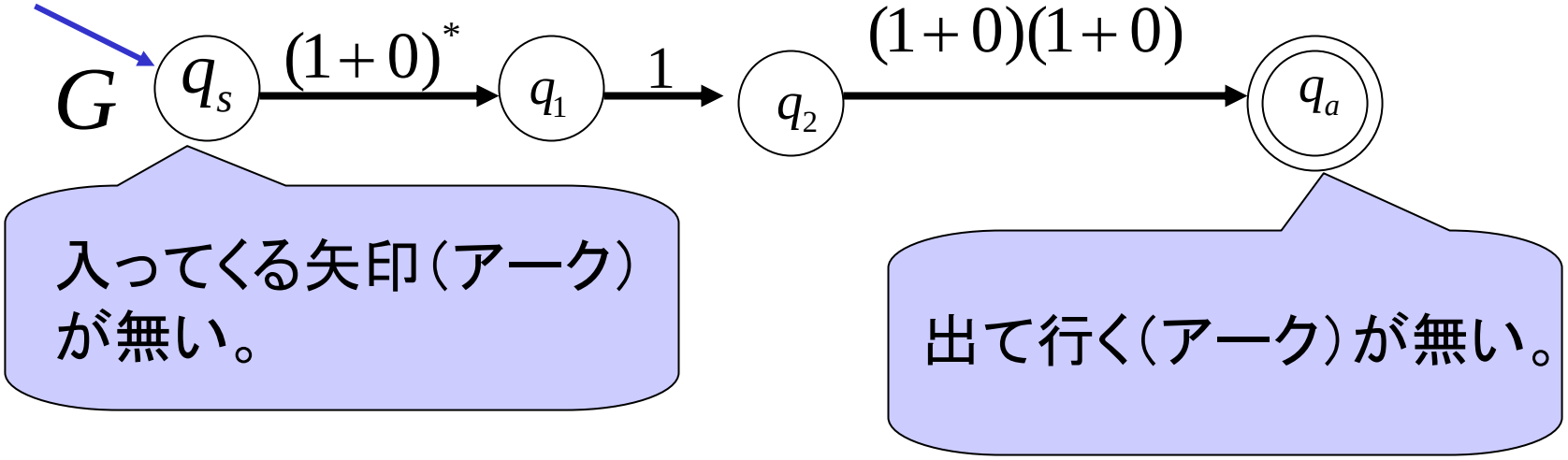
であり、δ は次の状態遷移表により定義される。

δ	q_1	q_2	q_a
q_s	$(1+0)^*$	ϕ	ϕ
q_1	ϕ	1	ϕ
q_2	ϕ	ϕ	$(1+0)(1+0)$

GNFAに関する注意

初期状態 q_s には、他の状態からの遷移がない。
受理状態 q_a からは、他の状態への遷移がない。

初期状態と、受理状態はそれぞれ1つづつしかない。
特に、受理状態が1つであることに注意する。



練習

$\Sigma = \{0,1\}$ 上の

$$\text{言語} \left\{ w \middle| \begin{array}{l} w\text{は最後から4文字目が,} \\ 0\text{である文字列} \end{array} \right\}$$

を受理する4状態の拡張NFAを状態遷移図と、
形式的定義の両方で示せ。