2008/4/15 (火)

平成20年度基礎セミナー

(論理・数値アルゴリズムグループ:電子計算機工学教育チーム)
時間割：火曜日 4 時限
場所：大学院棟 D416

数学編

(身の周りの数学)

1　目的

身近な対象を題材とした問題を数学的に考察することによって, 論理的思考能力を訓練する. 考察内容を発表することによって, 発表能力を能力を訓練する. 討論に参加することにより，能動的な学習法を学ぶ.

2　セミナー実施方法

各受講者は, セメスタ開始時に 3.1 から 3.12 までの 12 テーマの中の 1 つを個々に選択する．各テーマの課題を自分の発表日までに解決し発表する．実施法に関して，以下に各項目に分けて説明する.

2.1　課題種類

各テーマには，**準備課題**と**討論課題**がある．それぞれの意味合いは，以下のとおりである.

準備課題: 各受講者 (発表者および発表者以外の参加者) が事前に考察する課題．発表者は発表前に担当テーマの準備課題全てを解決し，発表する．参加者は準備課題の全てを解決する必要は無いが，課題の内容は把握しておくこと．各テーマにおいて，この課題には (準 1)，(準 2)，… といった番号で示す.

討論課題: セミナー当日の講義時間中に，討論する課題.「3 人寄れば文殊の知恵」という諺のように，受講者全員で難問に挑戦する．なお，討論課題は準備課題の内容を発展させたような問題を扱う．よって，準備課題の解決法の理解が役立つはずである．各テーマにおいて，この課題には (討 1)，(討 2)，… といった番号で示す.

2.2　受講生の役割

発表者:
発表者は，自分の発表日までに全ての準備課題を解決し，次のものを準備すること. (もちろん，討論課題の解決法まで予め解決しておいてもかまわない．)

原稿資料 準備課題の解決法をあらかじめ原稿にまとめる.

プレゼン資料 準備課題の解決法をプレゼンするために必要な資料. パワーポイント等のプレゼン用ファイル，板書用のノート，テーマ毎の小道具等.

課題に関して教員に相談したり文献を調べたりすることができる．準備する資料についても予め教員にチェックしてもらうと良い．また，発表当日において発表者は次のような心構えで望むこと.

発表 準備課題においては,「先生」の役割りを担って，全ての参加者にわかりやすく解法を説明する.

統括 討論課題においては,「議長」の役割を担って，複数の意見をまとめて課題解決に向かう．意見が少ない時には，指名などを行なうのも良い.

参加者:
参加者は発表者だけにまかせるのではなく，次の項目に注意して受講すること.

通読 発表スケジュールに従い各テーマの課題を全て読んでくること.

予習 発表スケジュールに従い各テーマの準備課題の解決法を自分なりに考えておくこと.

質問 発表時間中に発表者に質問等を行ない，理解を深めること.

討論 特に，討論課題に対して，自分の考えを述べてる等して課題の解決に貢献すること.

これらの参加態度もこのセミナーの単位評価の基準に入れる.

2.3　発表スケジュール

基礎セミナーの毎回の講義時間では，2 つの課題を議論する．発表のスケジュールは別途定める．各発表者は，つぎの発表時間を目安にして発表を行なうこと.

準備課題 30 分

討論課題 15 分

3　課題

以下に課題を示す.

3.1　騎士と悪漢 (論理)

ある島の住人は全て騎士か悪漢である. 騎士は常に正しい事を言う (正しくないことは言わない). 悪漢は常に正しくない事を言う (正しいことは言わない). ただし, ある住人が騎士か悪漢かを見た目で判断することはできない.

この島の裁判所に裁判官が赴任した. 裁判官は騎士でも悪漢でもなく我々と同じ普通の人物だが, 物事を論理的に判断することができる. そのため, 裁判官が証明できた事柄は全て正しい. (正しくない事柄を, 間違って証明してしまうことはない.) また, 裁判官はある事柄の証明に十分な情報が与えられれば, 必ずその事柄を証明できるものとする.

裁判官は, 住人が全て騎士か悪漢のどちらかであること, 騎士が常に正しい事を言うこと, 悪漢が常に正しくない事を言うことを知っているものとする.

このとき, 以下の問題に答えよ.

(準 1) 被告：アーサー

アーサーは裁判官に「私は騎士です.」と証言した.

アーサーは騎士か悪漢か？

裁判官はアーサーが騎士であるか悪漢であるかをこの証言から証明できるか?

(準 2) 被告：バーナードとチャールズ

バーナードは裁判官に「私とチャールズは二人とも悪漢です.」と証言した.

バーナードは騎士か悪漢か？

チャールズは騎士か悪漢か？

裁判官はバーナード, チャールズが騎士であるか悪漢であるかをこの証言から証明できるか？

(準 3) 被告：ダニエル, エドワード

裁判官はダニエルに「あなたがた二人 (ダニエルとエドワード) は, 二人とも騎士ですか？」と質問した. ダニエルはこの質問に「はい」か「いいえ」で答えた. 裁判官はこの答えからダニエルとエドワードが騎士であるか悪漢であるかを証明できなかった. 次に裁判官はダニエルに「あなたがた二人 (ダニエルとエドワード) は, 同じタイプ (二人とも騎士, または, 二人とも悪漢) ですか？」と質問した. ダニエルはこの質問に「はい」か「いいえ」で答え

た. 裁判官はこの答えを聞いてダニエルとエドワードがそれぞれ騎士であるか悪漢であるかを証明することができた.

ダニエルは騎士か悪漢か？

エドワードは騎士か悪漢か？

裁判官はどのようにしてそれを証明したか？

(討 1) 被告：フレッド, グレッグ

二人の被告のうち, 一人は長髪でもう一人は短髪であったが, どちらがフレッドでどちらがグレッグかはわからなかった. また, それぞれについて, 騎士であるか悪漢であるかもわからなかった. 裁判官は長髪の被告に「フレッドは騎士ですか？」と質問した. 長髪の被告はこの質問に「はい」か「いいえ」で答えた. 裁判官はこの答えを聞いて, 長髪の被告がフレッドであるかグレッグであるかを証明することができた.

長髪の被告はフレッドかグレッグか？

裁判官はどのようにしてそれを証明したか？

(討 2) 被告：ヘンリー

ヘンリーは裁判官に「あなた (裁判官) は私が騎士であると証明することはできない.」と証言した.

ヘンリーは騎士か悪漢か？

裁判官はヘンリーが騎士であるか悪漢であるかをこの証言から証明できるか?

3.2 偽コインの発見 (論理)

本物のコインと重さだけが異なる偽コインを, 天秤を使って見つる問題を考えよう. 以後は, 本物のコインを真コイン, 重さの異なるコインを偽コインと呼ぶことにする. 天秤は, 左右が同じ重さのときに釣合い, 左右の重さが異なるときは重い方に傾く. また, 1 つの天秤の皿にはコインが何枚でも載せらるものとする. このような天秤を用いて真コインに交じった偽コインを見つける. ただし, 天秤の使用回数はできるだけ少くなるようにしたい.

(準 1) 3 枚のコイン中, 2 枚が真コインで 1 枚が偽コインであることがわかっている. このとき, 偽コインの発見法を示せ. 天秤は最悪何回使用するか.

(準 2) 9 枚中偽コインが一枚だけ混っている. このとき, 偽コインの発見法を示せ.

(準 3) 偽コインが真コインより重いことが判っているとする. このとき, 27 枚中に 2 枚の (重さの等しい) 偽コインが混っている. このとき, 偽コインの発見法を示せ.

(討 1) n 枚のコインの中に 1 枚の偽コインが混っている．このとき，出来るだけ少ない方法で偽コインを発見する方法を示せ.

(討 2) 10 個の袋にコインが詰まっている. この中の 1 つの袋には, 偽コインだけが詰まっており, 残りの袋には真コインだけが詰っている. このとき, 偽コインの入った袋を特定したい. ここでは, 偽コインが真コインより $1g$ だけ重いことが判っているものとし, メモリが付いた天秤を用いることができるものとする. このとき, できるだけ天秤の使用回数を少なしくて, 偽コインの入った袋を特定する方法を示せ. ただし, 各袋には十分な数のコインが入っているものとする.

3.3 ビッフォンの針 (確率)

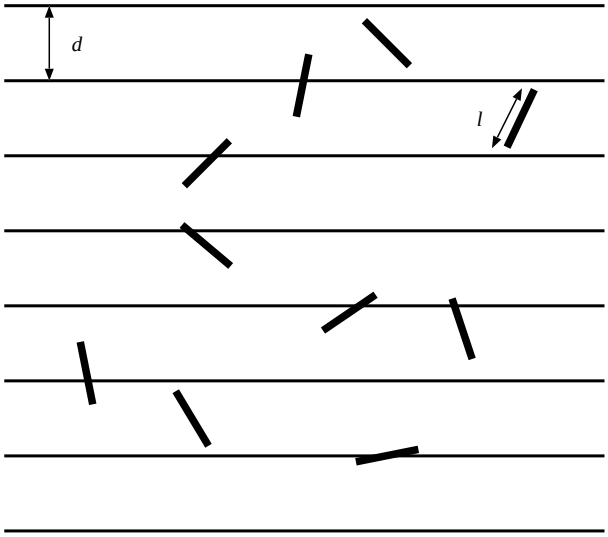


図 1: 罫線上の針

フランス貴族, ジョルジュ・ルイ・レクレール, ビッフォン伯爵 (1707-1788) は, 1777 年に次のような問題を提起した. 「罫線入りの紙の上に短い針を落すとする. そのとき, 針がどれかの線と交わる確率はいくつか？」この問題において, 図 1 のように罫線間の幅 d とし, 針の長さを l としたき, 針が罫線と交わる確率を以下の小問に従って答えよ.

(準 1) $l \leq d$ のとき, 落ちた針と罫線とが無すを角度 θ としたとき, 針が罫線と交わる確率を l,d,θ で表わせ.

(準 2) $l \leq d$ のとき, 針が罫線と交わる確率を l,d で表わせ.

(準 3) 罫線に針 $l \leq d$ の針を落す試行を繰り返しおこなえば, 針と罫線が交わる比率は (2) の確率に漸近していくと考えられる. このような針を落す実験を十分な回数 (N 回) 行なったとき, c 回交わったとする. このとき, π の近似値が, l, d, N,c で表わせることを示せ.

(討 1) $l > d$ のとき, 落ちた針と罫線とが無すを角度 θ としたとき, 針が罫線と交わる確率を l,d,θ で表わせ.

(討 2) $l > d$ のとき, 針が罫線と交わる確率を l,d で表わせ.

3.4 15 パズル (代数)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

図 2: 目標配置

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	*	*
13	14	*	

図 3: 中間配置

15 パズルはよく知られたパズルで, 次のようなルールで行なわれる.

(a) ゲーム盤は 4×4 のます目からかなる.

(b) ゲーム盤上には, 1 から 15 の数字が書いてある駒が 1 つのマスに 1 つづつ置いてあり, 1 つのマスが空いている. なお, ゲーム開始時には右下のマスが空いている.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

図 4: 正配置

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

図 5: 逆配置

(c) 空マスの隣の駒を空マスに移動できる. このとき, 駒があったマスが新しく空マスになる.

(d) (c) に基づた移動を繰り返して, 駒を図 2 のように数字の順に並べる.

このゲームに関して, 次のことを説明せよ.

(準 1) どんな配置からでも, 1 を左上に移動できる.

(準 2) どんな配置からでも, 1 列目 (最上列) をそろえることができる.

(準 3) どんな配置からでも, 1,2 列目をそろえることができる.

(準 4) どんな配置からでも, 図 3 のように, 11,12,15 以外の駒をそろえることができる.

(討 1) どんな配置からでも, 図 4 かあるいは, 図 5 のいずれかに移動することができる.

(討 2) 図 4 から, 図 5 に移動することはできない.

3.5 テープ状容器へのコイン詰め込み問題 (幾何)

テープ状の容器にコインを詰め込む問題を考えよう. コインの直径はすべて 1 とする. 以下の問いに答えよ.

(準 1) 2×1000 の長方形に, 2000 枚のコインを詰め込む方法を示せ.

(準 2) 2×1000 の長方形に, 2000 枚を越えるコインを詰め込む方法を示せ.

(準 3) (2) の詰め込み方で何枚詰め込めるかを示せ.

(討 1) 3×1000 の長方形にできるだけ多くのコインを詰め込む方法を示し, その方法で詰め込み可能な枚数を示せ.

(討 2) $2 \times x$ のテープ状容器にコインを詰め込むとき，(準 2) の詰め込み方が (準 1) の詰め込み方より大きくなるような長さ x を求めよ.

3.6 折り紙 (幾何)

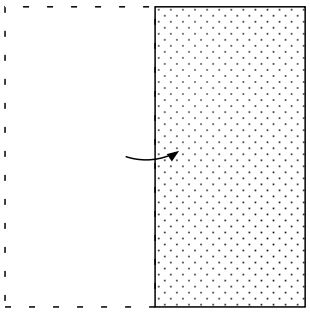


図 6: 初回の折り方 1

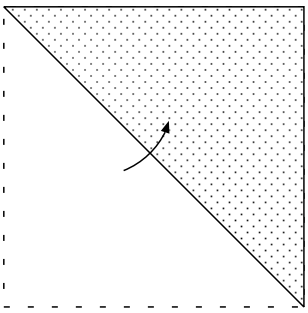


図 7: 初回の折り方 2

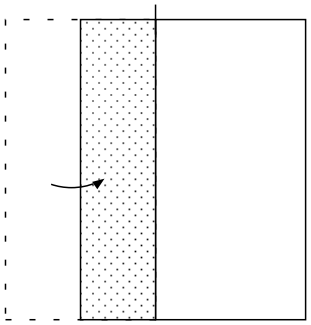


図 8: 折り方 1

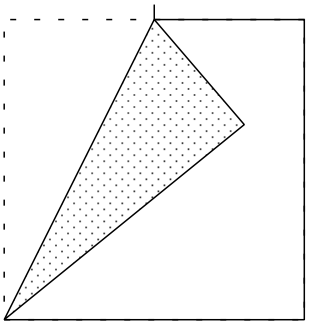


図 9: 折り方 2

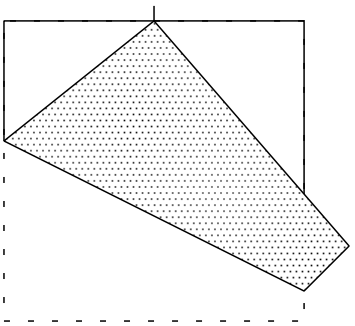


図 10: 折り方 3

ユークリッド幾何学は, “直線を引く”, “円を描く” 等の作図法を基にした幾何学である. これに対して, 折り紙は, “折る” という操作を基にした一種の幾何学と考えることができる. ここでは, 折り紙は以下のようなルールに従うものとする.

(a) 折り紙は一辺の長さが 1 の正方形状の理想的な無地の紙とする.

(b) 折り紙は, 角を, 角や “印” に合わせて折ることができる. なお, 角は “印” の一種とみなす. また, 折ってできる線分を折り目といい, 折り目や辺の交点には新たに印を付けることができる.

(c) 折り紙は 2 つの印を結ぶ直線で折ることができる. その際, 折り目や辺の交点には新たに印を付けることができる.

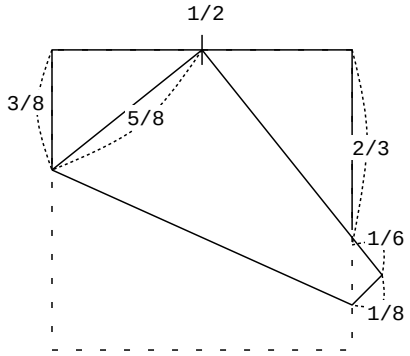


図 11: 長さの関係 1

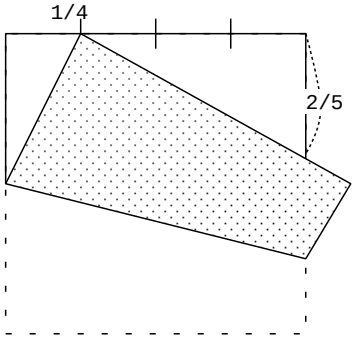


図 12: 長さの関係 2

(d) 1 辺が折り目にそうように, あるいは 1 辺が 2 つの印を通るように, 折り紙を折ることができる. その際, 折り目や辺同士の交点には新たに印を付けることができる.

(e) 任意の折れ目を選んで図形を描くことができる.

折り紙上には, 折る操作だけで, 様々な長さを出現させることができる. まず, この折り紙の基本的な数理を導く.

折り紙の初回の折り方は, 図 6 かあるいは図 7 のいずれかである.

(準 1) 図 6 の折り方に従い一辺の中点に印を付けておけば,, 次の 3 つの折り方が可能である. (図 8, 図 9, 図 10 参照.)

このとき, 図 10 の折り方に対して, 図 11 に示した長さの関係が成り立つことを示せ.

(準 2) 長さ 1/4 の位置に角をあてることによって折ったとき, 図 12 に示した長さの関係が成り立つことを示せ.

次に, 折紙上に, 立方体の展開図を作図することを考える. 以下の設問に答えよ.

(準 3) 立方体の展開図を全種類描きだせ.

(討 1) 正方形中に立方体の展開図を埋め込め. ただし, それぞれの展開図において, 立方体の一辺が最も長くなるようにせよ.

(討 2) 折る操作だけで, 折紙中に立方体の展開図を作図せよ. ただし, なるべく立方体の一辺が長くなるようにすること.

3.7 一筆書き (グラフ)

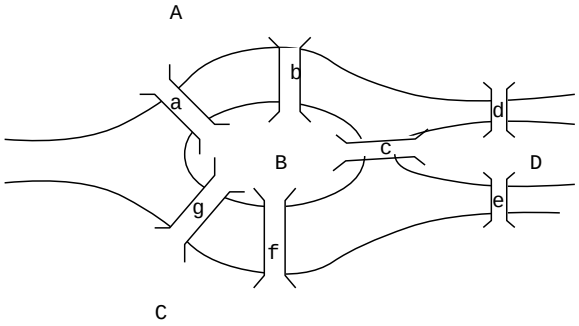


図 13: ケーニッヒベルグの橋

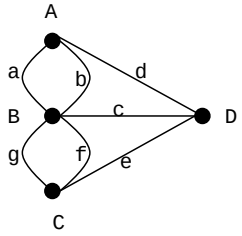


図 14: ケーニッヒベルグ地区に対応するグラフ

ケーニッヒベルグの町は, 川によって 4 つの部分に分かれていて, 図 13 に示すように 7 本の橋によって相互に連結されている.

ケーニッヒベルグの市民たちは, どの橋も正確に一度だけ渡って出発点に立ち戻る方法を探していた. しかし, どの場所から始めても, またどんなに試みても, そのようなことが出きなかった.

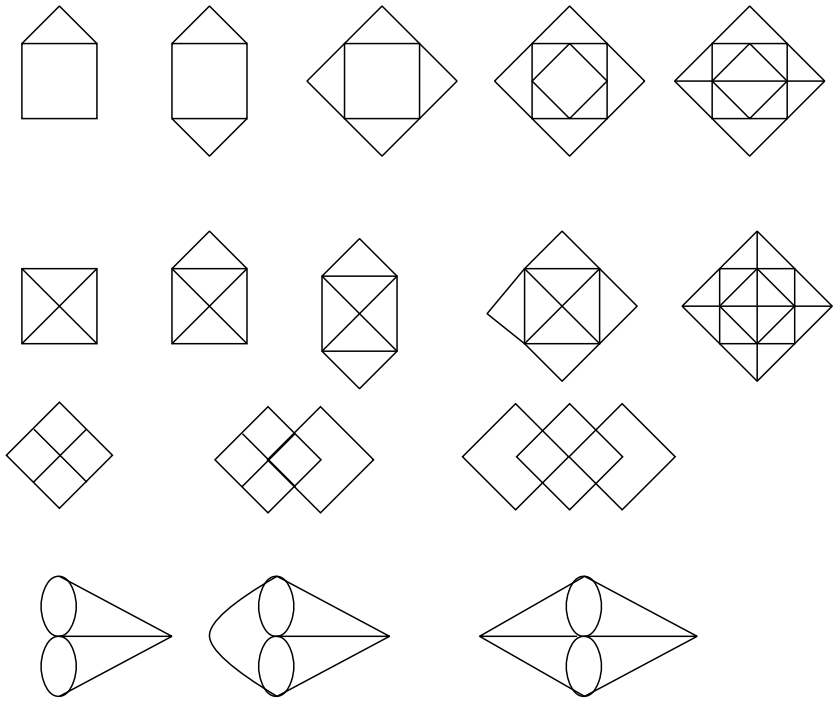


図 15: いろいろなグラフ

この問題は, 下図のように, 町の区画を点として, 橋による接続関係を辺とする図形 (グラフ) にすると考えやすい. 問題は, 図形が一筆書きできるかどうかと同じである.

そこで, 一筆書きのできる図形の性質を調べることにする.

(準 1) 図 15 の図形を一筆書きできるものと, できないものに分類せよ.

(準 2) 一筆書きできない図形に, 新たな辺を加えて一筆できようにせよ. ただし, 加える辺はできるだけ少なくすること.

(準 3) 一筆書きできるものを, 書き始めが特定されているものと, 特定されないものとに分類せよ.

(準 4) すべての図形に対して, 各点に接続する辺数を調べよ.

(準 5) 自分で例題をつくって, (準 1) から (準 4) と同様の課題を行なえ.

(討 1) どのような図形が一筆書きできるのかを説明せよ.

(討 2) なぜ一筆書きできるのかを説明せよ.

図 16: 日本地図

3.8　地図の色塗り問題 (グラフ)

白地図に色を塗ることを考える. ただし, 隣り合う地区には同じ色を塗ることなしに, できるだけ少ない色で塗りたい.

(準 1) 図 16 の日本地図を, できるだけ少ない色で塗り分けよ.

(準 2) 図 17 のアメリカ地図を, できるだけ少ない色で塗り分けよ.

(準 3) 地図の各区画を点とし, 隣接関係を辺とするような平面グラフを考えることができる. この平面グラフでは, 点数を v, 辺数を e, 面数を f とすると,

$$v - e + f = 2$$

という関係式が成り立つ. このことを説明せよ.

(準 4) 「どんな平面グラフでも, 接続する辺数が 5 以下である点が存在する.」そうである. なぜか, 説明せよ.

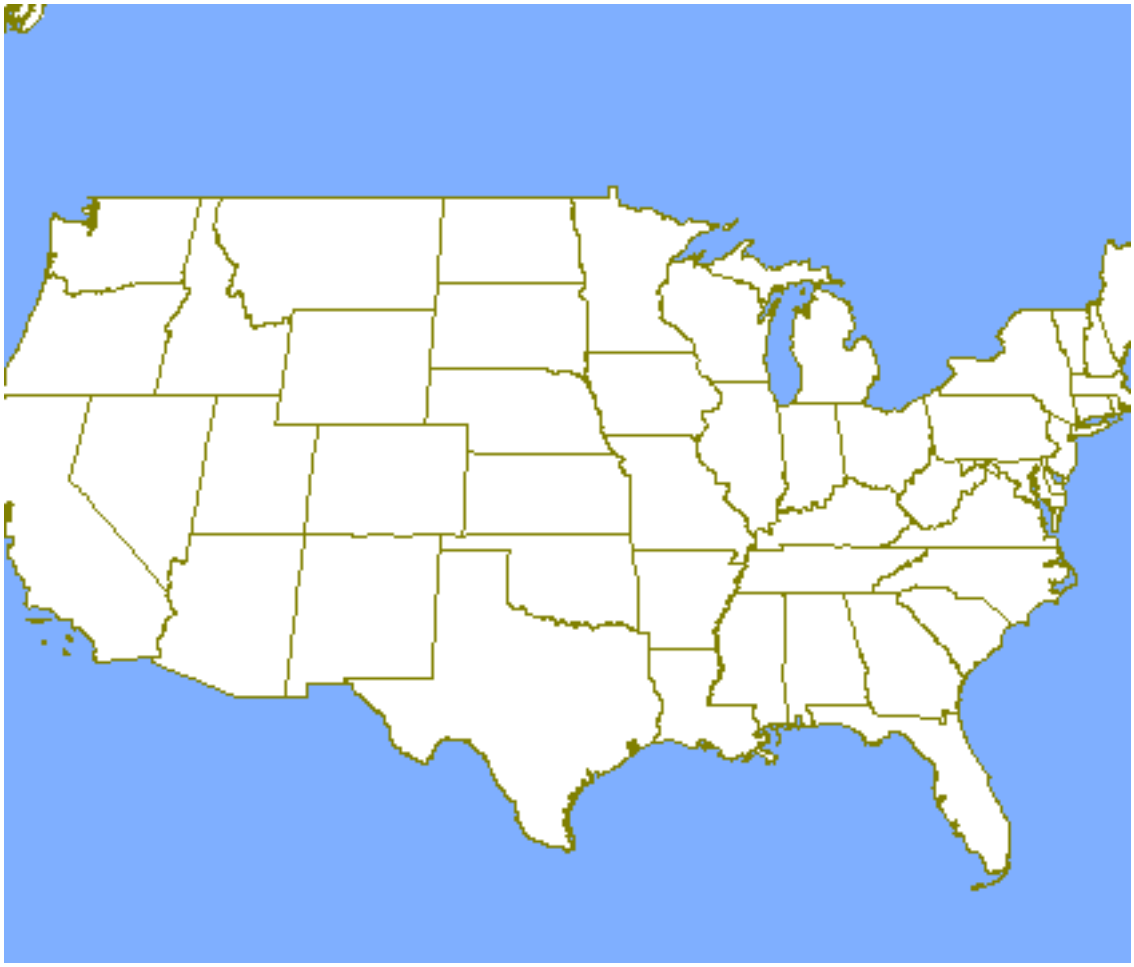


図 17: アメリカ合衆国地図

(討 1) 「どんな地図でも, 6 色用いれば塗り分けることができる.」そうである. なぜか説明せよ.

(討 2) 「どんな地図でも, 5 色用いれば塗り分けることができる.」そうである. なぜか説明せよ.

3.9 美術館の監視 (幾何+グラフ)

図 18 のような複雑な見取り図を持つ美術館を監視することを考える. この美術館には柱がなく, すべて壁だけでできている. その美術館の壁は (ガラス等ではない) 通常の素材でできており, 監視員は壁を透視することはできない. また, 監視員は美術館のある場所 (詰所) に常駐しており動き回らないが, 詰所の中で顔を回すことで, 360 度のすべて監視することができる. このような美術館において壁の

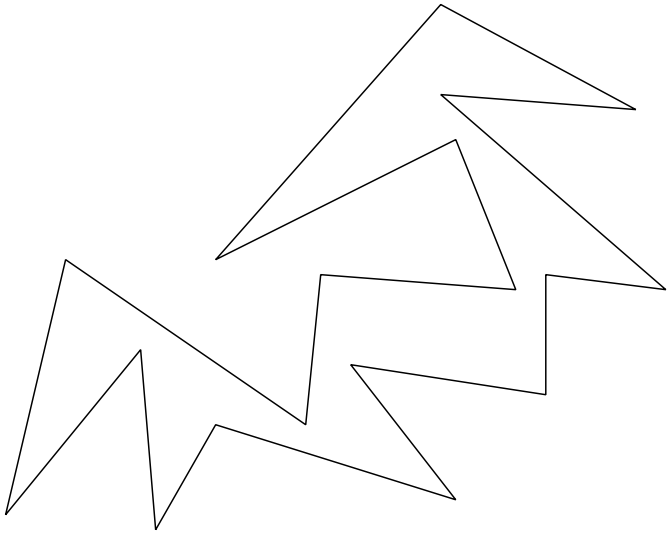


図 18: 美術館の見取り図

枚数が n のときに, 美術館内のすべての場所を監視できるような監視員 (詰所) の数をできるだけ少なくなるようにしたい.

(準 1) 図 18 の美術館の内部を 3 角形に分割せよ.

(準 2) (準 1) の三角形の数を示せ.

(準 3) (準 3) の美術館を 6 人で監視できるように, 詰所の場所を定めよ.

(準 4) 自分で監視員が多く必要そうな美術館を示し, (準 1) から (準 3) と同様な問題を解け.

(討 1) 壁の枚数が n 枚であるようなどんな美術館も, 監視員の数が $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ で監視できることを説明せよ.

(討 2) 監視員の数が $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 人必要となるような n 枚の壁から出来ている美術館の形状を示せ.

3.10 暗号 (整数)

田中さんは佐藤さんから銀行口座の暗証番号を教えてもらう約束をしている. 暗証番号 x は 4 桁の整数である.

しかし, 田中さんと佐藤さんの間の連絡手段は駅の伝言板だけであり, 他の連絡手段は使えない. そこで, 以下のような暗号を使って佐藤さんから田中さんへ暗証番号を伝えることにする.

◇田中さんがすること (準備)

P1 3 桁の素数を 2 つ用意する. それぞれを p と q とする.

P2 $n = pq$ と $f = (p-1)(q-1)$ を求める.

P3 f と互いに素であるような整数 c を用意する. (f と c の最大公約数が 1.)

P4 n の値と c の値を伝言板に書いておく.

◆佐藤さんがすること (暗号化)

C1 伝言板を見て n の値と c の値をメモする.

C2 暗証番号 x に対して, x の c 乗を n で割った余り y を計算する. ($y \equiv x^c \pmod{n}$).

C3 y の値を伝言板に書いておく.

◇田中さんがすること (復号)

D1 伝言板を見て, y の値をメモする.

D2 c と d の積を f で割った余りが 1 になるような整数 d を用意する. ($cd \equiv 1 \pmod{f}$)

D3 y,d および n を使って x の値を計算する.

このとき, 以下の問に答えよ.

(準 1) y,d,n から x の値を計算する (暗号を元に戻す=復号) 方法を示せ.

(準 2) 田中さん以外の人が暗号を解読できない理由, すなわち, 掲示板に書かれた情報 (n, c, y) だけを使って x を計算することが難しいのは, 整数のどのような性質を利用しているかを説明せよ.

(討 1) 田中さんと佐藤さんはじゃんけんで勝負することになった. しかし, 田中さんと佐藤さんの間の連絡手段は駅の伝言板だけであり, 他の連絡手段は使えない. 上記問題 A の暗号の方法を参考に, 田中さんと佐藤さんの双方が納得できる (どちらも「ずる」ができない) じゃんけんの方法を考えよ.

3.11 伝達ゲーム (論理)

N 人が受験するある大規模な試験 (例えば，センター試験等) において，受験者が協力して自分の順位を知ることを考えよう．ただし，試験管理組織 (以降，管理) から各受験生に伝えられる情報は，次の 2 つである．

• 点数．ただし，点数はすべて異なるものとし，同点の人はいないとする．

• 次順位の人の連絡先．(例えば，電話番号やメールアドレス)

また，これとは別に 1 位の人とビリの人 (N 位の人) は，管理から順位を知らされる．2 位から $N-1$ 位の人は，自分の順位を知らないことに注意しよう．例えば，1 位の人が 2 位の人に連絡を入れれば，2 位の人は自分が 2 位であることを知ることができる．また，順位がわからなくても，i 位の人 P_i が $i+1$ 位の人 P_{i+1} に連絡をすることにより，P_{i+1} は P_i の連絡先を知ることができる．これらを繰り返すことにより，$1 \leq i \leq N$ のすべての人 P_i が，自分の順位 J_i を知ることが目標である．

ここで，受験生数を 5 万人 ($N = 50000$) とし，1 日に連絡できる人数の上限 K を 10[件/日] として，以下の問いに答えよ．

(準 1) 5000 日以内ですべての人に連絡する方法を考えよ．

(準 2) 501 日以内ですべての人に連絡する方法を考えよ．(ヒント：同じ時刻に，複数の受験者が同時に連絡を取れることを利用する．)

(準 3) 10 日以内ですべての人に連絡する方法を考えよ．(ヒント：情報伝達を効率的に行なうために，連絡先を指数的に増やすようにする．)

(討 1) 10 日以内で 1 位の人が試験の平均点を知る方法を考えよ．

(討 2) 10 日以内で受験者全員が試験の平均点を知る方法を考えよ．

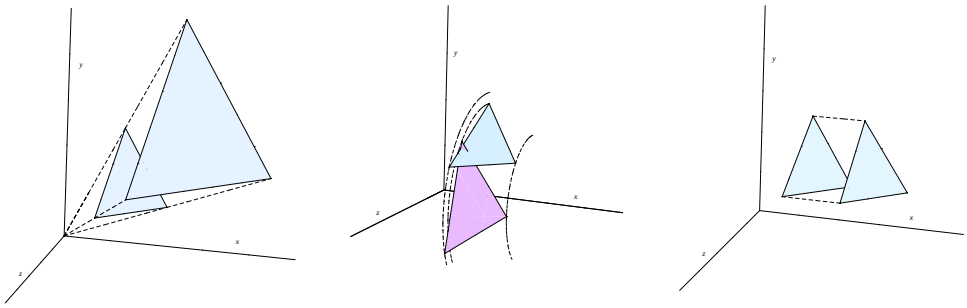
3.12 コンピュータグラフィックス (線形代数)

コンピュータ上で処理された物体の形状に関する情報を画面に表示する技術はコンピュータグラフィックスと呼ばれ，コンピュータゲームや CAD による設計など広く活用されている．

いま，3 次元空間上のある物体の形状（3 次元図形）を構成する多数の点のそれぞれが，座標 (x_i, y_i, z_i) で表されるものとしよう（簡単のため，3 個の座標 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) で表される三角形を考えてもよい）．このとき，それらの座標に対し，適切な変換行列を掛けることによる座標変換を行うことで，物体の位置を別の場所に動かしたり，物体を変形したりすることができる．

(準 1) 3 次元図形を構成する各点の座標に対し，ある 3 次正方行列 S^* を掛けることで，元の図形と相似で大きさが 2 倍の図形 (図 19-a) を得ることができる．そのような 3 次正方行列 S^* を求めよ．

(準 2) 3 次元図形を構成する各点の座標に対し，ある 3 次正方行列 R^* を掛けることで，元の図形と合同で，x 軸を回転軸として時計回り（右ネジが x 軸の正の方向に向かうような回転）に 45 度だけ回転した図形 (図 19-b) を得ることができる．そのような 3 次正方行列 R^* を求めよ．



(a) 拡大　　(b) 回転　　(c) 平行移動

図 19: 3 次元図形の移動・変形

(準 3) 3 次元図形を構成する各点の座標に対し，元の図形と合同で，x 軸に平行に距離 1 だけ移動している図形 (図 19-c) を得るような操作を考える．任意の 3 次元図形を構成する各点の座標に対し，ある特定の 3 次正方行列を掛けることでは，この操作を行えないことを示せ.

(討 1) 任意の 3 次元図形に対し，以下の 3 種類の操作を行列の掛算のみで実現できるようにするためには，3 次元図形の各点の座標をどのように表現したらよいか，説明せよ.

- 元の図形と相似で，大きさが α 倍の図形を得るための行列 S_α.
- 元の図形と合同で，x 軸を回転軸とし，角度 θ だけ回転した図形を得るための行列 Rx_θ. 同様に，y 軸を回転軸とする回転を行うための行列 Ry_θ,z 軸を回転軸とする回転を行うための行列 Rz_θ.
- 元の図形と合同で，$(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ だけ平行移動した図形を得るための行列 $T_{(\delta_x,\delta_y,\delta_z)}$.

(討 2) 3 次元空間中のある点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り，単位ベクトル $N = (u, v, w)$ の方向を持つ直線を考える．この直線を回転軸とし，角度 θ だけ回転した図形を得るための行列 R_θ を設問 **(討 1)** で得られた行列の積により表すにはどうしたらよいか，議論せよ.