

2008/7/8 (火)

平成20年度基礎セミナー

(論理・数値アルゴリズムグループ:電子計算機工学教育チーム)

数学編

(追加問題)

(7月18日(金)火曜日代替日実施)

1 数える (集合論：集合と対応)

何かを“数える”ということを考え直そう。物心ついたときに、指折り数えた経験は誰でも持っていると思う。ここでは、その当時に戻って”もの”を数えることを数学的に考察する。

数学では、“ものの集まり”のことを集合として扱い、“ものの個数”を基数あるいは濃度として扱う。ここで、基数は有限集合の要素数で主に用いられ、濃度は無限集合の要素数で主に用いられる用語である。(ちなみに、英語では基数、濃度ともに、cardinality であり、同じ単語が割り当てられている。)ここでは、有限集合も無限集合の区別なく、集合 X の要素数を集合 X の濃度といい、 $|X|$ で表わす。ある2つの集合 X と Y が与えられたとき、 X の要素と Y の要素との間に1対1の対応を作ることができるとき、「 X の濃度と Y の濃度は等しい」と言う。しかし、 X の要素と Y の要素との間に1対1の対応を作ろうとすると、どのように対応させても X の要素が余るときには、「 X の濃度は Y の濃度より大きい」と言う。

このことを、指折り数えることを思い出しながら考察する。まず、次のような有限集合を考察する。

集合“指” = { 親指, 人差指, 中指, 薬指, 小指 }
集合“チーム” = { 伊藤, 佐藤, 鈴木, 田中, 田口 }
集合“食事” = { オニギリ, ラーメン, パン, パスタ, ドンブリ }
集合“上の服” = { T シャツ, Y シャツ, セーター, ベスト }
集合“下の服” = { ジーンズ, スカート, スラックス, ジャージ }
集合“FIVE” = { 1, 2, 3, 4, 5 }
集合“FOUR” = { 1, 2, 3, 4 }

例えば、ある日おける集合“チーム”のメンバーが取った昼食が、すべて集合“食事”の要素であり、しかもどのメンバーも異なる食事を取った場合、“食べた”という関係で一対一対応を作ることができる。このような一対一対応を作ることができるとき、チームの要素数(人数)と食事の要素数(種類数)が等しくなる。例えば、一対一対応は、次のように表わされる。

“ある日の昼食” = {
 伊藤 $\longleftrightarrow$ ドンブリ,
 佐藤 $\longleftrightarrow$ ラーメン,
 鈴木 $\longleftrightarrow$ オニギリ,
 田中 $\longleftrightarrow$ パスタ,
 田口 $\longleftrightarrow$ パン,
 }

このように、どちらの集合にも余りがなく（このことを全射といいます）、どちらの集合の要素にも唯一つの要素だけが対応している（このことを単射といいます）と、要素数が等しいことがわかる。なお、全単射があれば一対一対応があることがわかる。

次に、ある日の集合チームのメンバーが着ていた上の服を考察しよう。この集合チームの各メンバーが上の服に対して、ある日に着ていた上の服で定めた、次のような対応を考える。

“ある日の上の服” = {
 伊藤 $\longleftrightarrow$ T シャツ,
 佐藤 $\longleftrightarrow$ ベスト,
 鈴木 $\longleftrightarrow$ T シャツ,
 田中 $\longleftrightarrow$ Y シャツ,
 田口 $\longleftrightarrow$ セーター,
 }

この例では、T シャツを着ている人は2人いる。（この場合単射が崩れています。）この例では、どのようにがんばってみても、“チーム”と”上の服”では一対一対応が作れないことがわかんと思う。この場合、チームの各人の着ている上の服は1つ（1種類）であるが、“上の服”のある種類からは、複数の人が着ている。このことから、 $| \text{チーム} | > | \text{上の服} |$ であることがわかる。

ここで、指折り数えることを考え直そう。“チーム”のメンバーを指折り数えよう。幼ないころ指折り数えていたことは、数学での対応で考察すると、次のような対応を作っていることに相当する。

“指折る” = {
 伊藤 $\longleftrightarrow$ 親指,
 佐藤 $\longleftrightarrow$ 人差指,
 鈴木 $\longleftrightarrow$ 中指,
 田中 $\longleftrightarrow$ 薬指,
 田口 $\longleftrightarrow$ 小指,
 }

さらに、通常は声を出して、数と指の対応も作っている。

“数える” = {
 親指 $\longleftrightarrow$ 1,

人差指 $\longleftrightarrow 2$,
 中指 $\longleftrightarrow 3$,
 薬指 $\longleftrightarrow 4$,
 小指 $\longleftrightarrow 5$,
 }

このことは、無意識で、つぎの合成対応を構成していることになる。

“指折り数える” = {

伊藤 $\longleftrightarrow 1$,
 佐藤 $\longleftrightarrow 2$,
 鈴木 $\longleftrightarrow 3$,
 田中 $\longleftrightarrow 4$,
 田口 $\longleftrightarrow 5$,
 }

有限の要素からなる集合に対しては、その集合の濃度は要素の個数を指す。なお、 n 要素の有限集合で数えるという行為は、 $Z_n^* = \{1, 2, \dots, n\}$ への一対一対応を作ることに対応する。このような考え方は、整合性を保ちながら、無限集合に拡張することができる。この集合の濃度に関して、次の問題を考察してみよう。

(準 1) “食事” と “チーム” に対して、“ある日の昼食” の一対一対応以外に、一対一対応 “別の日の朝食” を 1 つ示せ。

(準 2) “上の服” と “下の服” がそれぞれ 1 着ずつしか無いとする。ある日の 4 人の服装 (チームのメンバとは限らない) では、この “上の服” と “下の服” だけであった。このとき、“ある日の服装” という “上の服” から “下の服” への一対一対応を 1 つ示せ。

(準 3) “上の服” と “FOUR” という集合に対して、“服を指折り数える” という一対一対応を一つ示せ。

(準 4) 豊臣秀吉は、織田信長より霧深い山の本数の数え上げを命じられた。この山では、これまで何人もの武将が数え上げに失敗している。霧のため数えている途中に、どの木を数えたのかが判らなくなってしまうからである。豊臣秀吉は、あるアイディアを基にして、この問題を見事に解決した逸話が残っている。豊臣秀吉に負けないように、この問題の解決方法を考えよ。

(準 5) 全ての整数からなる集合 Z の濃度 $|Z|$ の濃度と全ての偶数からなる集合 E の濃度 $|E|$ の濃度が等しいかどうかを判定せよ。

(準 6) 全ての自然数からなる集合 N の濃度 $|N|$ の濃度と、全ての整数からなる集合 Z の濃度 $|Z|$ の濃度が等しいかどうかを判定せよ。

- (討 1) 全ての自然数からなる集合 N の濃度 $|N|$ と全ての有理数からなる集合 Q の濃度 $|Q|$ は等しいかどうかを判定せよ .
- (討 2) 开区間 $S = (0, 1)$ の濃度 $|S|$ と R の濃度 $|R|$ が等しいかどうかを判定せよ .
- (討 3) 全ての有理数からなる集合 Q の濃度 $|Q|$ と, 全ての無理数からなる集合 R の濃度 $|R|$ が等しいかどうか判定せよ .
- (討 4) 全ての有理数からなる集合 Q の濃度 $|Q|$ と, 全ての無理数からなる集合 M の濃度 $|M|$ が等しいかどうか判定せよ . ここで, $M = R - Q$ であり, M は全ての実数から全ての有理数を除いた集合である .