平成20年度基礎セミナー
(追加問題解答例)

草苅 良至

2008/7/18(金)

1　数の多さ (集合)

集合$''$指$''$ = { 親指，人差指，中指，薬指，小指 }
集合$''$チーム$''$ = { 伊藤，佐藤，鈴木，田中，田口 }
集合$''$食事$''$ = { オニギリ，ラーメン，パン，パスタ，ドンブリ }
集合$''$上の服$''$ = {T シャツ, Y シャツ，セーター，ベスト }
集合$''$下の服$''$ = { ジーンズ，スカート，スラックス, ジャージ }
集合$''FIVE''$ = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
集合$''FOUR''$ = $\{1, 2, 3, 4\}$

(準 1) “食事” と” チーム” に対して，“ある日の昼食” の一対一対応以外に，一対一対応” 別の日の朝食” を 1 つ示せ.

例えば，次のような対応が考えられる.

“別の日の朝食$''$ = {
伊藤 $\longleftrightarrow$ パン,
佐藤 $\longleftrightarrow$ ドンブリ, 鈴木 $\longleftrightarrow$ ラーメン,
田中 $\longleftrightarrow$ オニギリ,
田口 $\longleftrightarrow$ パスタ,
}

(準 2) “上の服” と” 下の服” がそれぞれ 1 着ずつしか無いとする．ある日の 4 人の服装 (チームのメンバとは限らない) では，この “上の服” と” 下の服” だけであった．この” ある日の服装” という” 上の服” から” 下の服” への一対一対応を 1 つ示せ.

例えば，次のような対応が考えられる.

“ある日の服装$''=\{$
T シャツ $\longleftrightarrow$ ジーンズ,
Y シャツ $\longleftrightarrow$ スラックス,
セーター $\longleftrightarrow$ スカート,
ベスト $\longleftrightarrow$ ジャージ,
$\}$

(準 3) “上の服” と”FOUR” という集合に対して，“服を指おり数える” という一対一対応を一つ示せ.

例えば，次のような対応が考えられる.

“服を指おり数える$''=\{$
T シャツ $\longleftrightarrow 1,$
Y シャツ $\longleftrightarrow 2,$
セーター $\longleftrightarrow 3,$
ベスト $\longleftrightarrow 4$
$\}$

(準 4) 豊臣秀吉は，織田信長より霧深い山の木の本数の数え上げを命じられた．この山では，これまで何人もの武将が数え上げに失敗している．霧のため数えている途中に，どの木を数えたのかが判らなくなってしまうからである．豊臣秀吉は，あるアイディアを基にして，この問題を見事に解決した逸話が残っている．豊臣秀吉に負けないように，この問題の解決方法を考えよ.

まず，森の木の集合を F とし，$|F|=f$ とする.

豊臣秀吉は次のようなことを行なったとされている.

- 十分な数の紐を用意する．この集合を H とし，$|H|=h$ とする.
- この紐を森の木に一本一本結んでいく．(紐の部分集合に対して，一対一対応を作成している．)
- 最後に H から残った紐 H' の本数 k を数える．(H' から，$K=\{1,2,\cdots,k\}$ へ, 一対一対応を作成している．)
- $f=h-k$ より，木の本数がわかる.

(準 5) 全ての整数からなる集合 Z の濃度 $|Z|$ の濃度と全ての偶数からなる集合 E の濃度 $|E|$ の濃度が等しいかどうかを判定せよ.

例えば，次のような一対一対応が作れる.

“偶数の数え上げ$''=\{$ 整数 $i \longleftrightarrow$ 偶数 $2i,$
$\}$

ちなみに，次の一対一対応が作れるので，奇数 O の濃度 $|O|$ も整数の濃度 $|Z|$ と等しい．

“奇数の数え上げ″ $=$ { 整数 $i \longleftrightarrow$ 奇数 $2i-1$,
}

以上より，$|Z| = |E| = |O|$ である．

(準 6) 全ての自然数からなる集合 N の濃度 $|N|$ の濃度と，全ての整数からなる集合 Z の濃度 $|Z|$ の濃度が等しいかどうかを判定せよ．

全ての自然数からなる集合 N の濃度 $|N|$ の濃度と $N \subseteq Z$ より，N から Z への自然な対応をつくることができる．よって，まず，$|N| \leq |Z|$ はすぐにわかる．

ここで，N と Z の一対一対応を作る．

自然数の偶数の集合を $N_e = \{2i | i \in N\}$, 自然数の 3 以上の集合を $N_o = \{2j+1 | j \in N\}$, とする．

このとき，次のように一対一対応を作れる．

“整数の数え上げ″ $= \{0 \longleftrightarrow 1$,
正の整数 $i \longleftrightarrow 2i$,
負の整数 $j \longleftrightarrow 2(-j)+1$
}

(討 1) 全ての自然数からなる集合 N と全ての有理数からなる集合 Q の濃度は等しいかどうかを判定せよ．

解)

$|N| = |Q|$

略証)

自然数と有理数との間に, 1 対 1 対応を作れることを示せばよい．ここでは, 具体的に 1 対 1 対応を構成する．

2 つの整数で 1 つの有理数を表わすことができる．すなわち,

$$Q = \{\frac{p}{q} | p, q \text{ は整数}, q \neq 0\}$$

である．よって, q 軸上を除いた格子点 (整数座標だけを持つ点) に Q の各要素を対応づけられる．これらの格子点を図 1 のようにうずまき状に辿っていきながら, 自然数と Q との一対一対応を構成する．

まず, $(1,0)$ と $1 \in N$ とを 1 対 1 対応させる．

ここで, うずまき状に辿って, 自然数の 1 から k までが Q の要素が対応づけられているとする．このとき, これまで出逢っていないような有理数 r に到達

するまで, うずまきをさらに辿っいく. (すなわち, これまで出逢っているような有理数をスキップする.) 自然数 $(k+1)$ と有理数 r を 1 対 1 対応させる.

このように対応関係を構成していけば, うずま状に格子点をすべて辿ることができるので, 自然数 N と有理数に 1 対 1 対応が構成できる.

よって, 自然数 N と有理数 Q との間に 1 対 1 対応が構成できることになり, $|N| = |Q|$ である.

$\square$

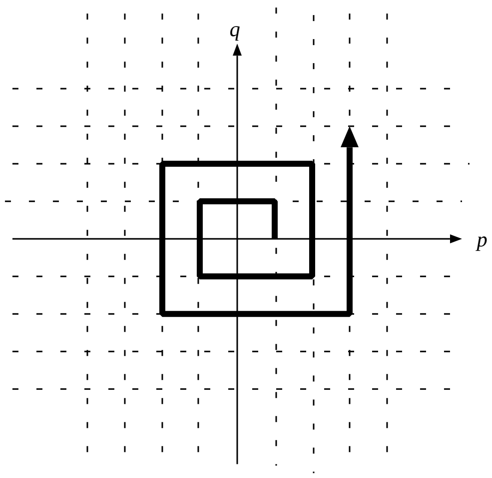

図 1: 自然数から有理数への一対一対応

(討 2) 開区間 $S = (0,1)$ の濃度と R の濃度が等しいかどうかを判定せよ.

区間 $S = (0,1)$ と $R = (-\infty, +\infty)$ は同じ濃度である. なぜなら次のような一対一写像 $f : R \to S$ が存在するからである. $x \in R$ に対して,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} tan^{-1}(x) + \frac{1}{2}$$

よって, $|S| = |R|$ である.

(討 3) 全ての有理数からなる集合 Q の濃度と, 全ての実数からなる集合 Q の濃度が等しいかどうか判定せよ. 解)

$|Q| < |R|$

である.

まず, $|Q| < |R|$ を示す.

略証)

一方, (1) より $|Q| = |N|$ である.

以下では,$|N| < |S|$ を背理法によって示す. $|N| = |S|$ と仮定する.(背理法の仮定.)

このとき $g : S \to N$ が存在する. 写像 g によって, S の要素を全て並べる事ができる. i 番目の S の要素 S_i を $S_i = 0.s_{i1}s_{i2}s_{i3}\cdots s_{ij}\cdots s_{i\infty}$ という十進小数で表す. ここで,$s_{ij} \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ である. $S_i \in S = (0, 1)$ なので, このような表現がいつも可能であることに注意する.

このとき, 次のような実数 $\bar{S} = 0.\bar{s}_1\bar{s}_2\bar{s}_3\cdots\bar{s}_j\cdots\bar{s}_{i\infty}$ を構成できる.

$$\bar{s}_j = \begin{cases} 1 & s_{jj} \neq 1, \\ 2 & s_{jj} = 1. \end{cases}$$

$\bar{S}$ は明かに S の要素である. したがって, $g(\bar{S}) = k$ なる自然数 k が存在する. このとき, $\bar{S} = S_k = 0.s_{k1}s_{k2}s_{k3}\cdots s_{kj}\cdots s_{k\infty}$ である. しかしながら, 一方では, $\bar{S}$ の作り方から $\bar{s}_k \neq s_{kk}$ であり, $\bar{S} = S_k$ と矛盾する.

以上より, 一対一写像は存在せず, $|N| < |S|$ である. □

(討 4) 全ての有理数からなる集合 Q の濃度と, 全ての無理数からなる集合 ($R - Q$: 全ての実数から全ての有理数を除いた集合) の濃度は等しいかどうかを判定せよ.

解)

$|Q| < |R - Q|$

略解)

背理法により示す. $|Q| = |R - Q|$ と仮定する.(背理法の仮定) このとき, 一対一写像 $f : Q \to (R - Q)$ が存在する.

このとき, N から $Q \cup (R - Q)$ への一対一写像が作れることを示す.

まず, $|Q| = |N|$ なので, 一対一写像 $g : N \to Q$ が存在する. このとき, 合成写像 $f \circ g : N \to (R - Q)$ も一対一写像である. よって,

N から $Q \cup (R - Q)$ への一対一写像 $r : N \to Q \cup (R - Q)$ を次のように構成できる.$n \in N$ として,

$$r(n) = \begin{cases} g(\frac{n}{2}) & n \text{ は偶数}, \\ f(g(\frac{n+1}{2})) & n \text{ は奇数}. \end{cases}$$

この写像は, N から $Q \cup (R - Q)$ への 1 対 1 写像, すなわち, N から R への 1 対 1 写像であり, $|N| < |R|$ に矛盾する.

以上より,

$|Q| < |R - Q|$

□

参考文献

[1] 秋山仁, R.L.Graham, 離散数学入門, 浅倉書店, 1993

[2] M.Aigner, G.M. Ziegler 著, 蟹幸博 訳, 天書の証明, Springer, 2002