2007/4/17 (火)

平成19年度基礎セミナー

(論理・数値アルゴリズムグループ:電子計算機工学教育チーム)

数学編

(身の周りの数学)

1　目的

身近な対象を題材とした問題を数学的に考察することによって, 論理的思考能力を訓練する. 考察内容を発表することによって, 発表能力を能力を訓練する.

2　セミナー実施方法

各受講者は, セメスタ開始時に3.1から3.12までの課題の中の1つを個々に受けとり, それを期日までに解決し発表する. 基礎セミナーの毎回の講義時間では，2つの課題を議論する．発表のスケジュールは別途定める．発表者は，自分の発表期日までに，次のものを準備すること.

- 原稿資料 (発表内容をあらかじめ原稿にまとめる.)
- プレゼン資料 (発表時に用いるプレゼン用ファイルか, あるいは板書用のノート.)

発表者は，課題に関して教員に相談したり文献を調べたりすることができる. 準備する資料についても予め教員にチェックしてもらうと良い．また，毎回のセミナーにおいて，発表担当以外の人は発表者に質問をするようにする．議論への参加態度もこのセミナーの単位評価の基準に入れる．

3　課題

以下に課題を示す.

3.1　インディアンポーカー (論理)

以下のようなルールのゲームを考える.

(a) プレーヤーは n 人の子と一人の親である.

(b) ハートのカードを n 枚, スペードのカードを $n-1$ 枚用意する. カードは全部で $2n-1$ 枚.

(c) 親は $2n-1$ 枚のカードをシャッフルし, 子に一人一枚づつ裏返して配る. このとき子は自分に配られたカードの絵柄を見てはならない.

(d) 子はカードを自分の額に貼りつける. (自分のカードの絵柄は自分には見えないが自分以外の人間の子からは見える.)

(e) 親は子を一人指名する. 指名された子は自分のカードの絵柄がハートかスペードかを予想して答える. ただし, わからない場合はパスしても良い.

(f) 答えた絵柄が正解なら子の勝ち. この場合親は子全員に配当を支払う. 答えた絵柄が不正解ならば親の勝ち. 配当は支払われない. 子がパスした場合は, 親は今まで指名していない子を一人選んで指名して (e) に戻る. ただし, 最後に指名された子はパスできない.

(1) 上記 (a)-(f) のルールに従ったゲームにおいて, 子が必ず勝つことができるのは, どのような組合せでカードが配られた場合であるか示せ.

(2) 子が必ず勝つ組合せのそれぞれの場合について, いかなる理由で子が自分のカードを確実に予測できるのかを説明せよ.

3.2　騎士と悪漢 (論理)

ある島の住人は全て騎士か悪漢である. 騎士は常に正しい事を言う (正しくないことは言わない). 悪漢は常に正しくない事を言う (正しいことは言わない). ただし, ある住人が騎士か悪漢かを見た目で判断することはできない.

この島の裁判所に裁判官が赴任した. 裁判官は騎士でも悪漢でもなく我々と同じ普通の人物だが, 物事を論理的に判断することができる. そのため, 裁判官が証明できた事柄は全て正しい. (正しくない事柄を,間違って証明してしまうことはな

い.) また, 裁判官はある事柄の証明に十分な情報が与えられれば, 必ずその事柄を証明できるものとする.

裁判官は, 住人が全て騎士か悪漢のどちらかであること, 騎士が常に正しい事を言うこと, 悪漢が常に正しくない事を言うことを知っているものとする.

このとき, 以下の問題に答えよ.

(1) 被告：アーサー

アーサーは裁判官に「私は騎士です.」と証言した.

アーサーは騎士か悪漢か？

裁判官はアーサーが騎士であるか悪漢であるかをこの証言から証明できるか?

(2) 被告：バーナードとチャールズ

バーナードは裁判官に「私とチャールズは二人とも悪漢です.」と証言した.

バーナードは騎士か悪漢か？

チャールズは騎士か悪漢か？

裁判官はバーナード, チャールズが騎士であるか悪漢であるかをこの証言から証明できるか？

(3) 被告：ダニエル, エドワード

裁判官はダニエルに「あなたがた二人 (ダニエルとエドワード) は, 二人とも騎士ですか？」と質問した. ダニエルはこの質問に「はい」か「いいえ」で答えた. 裁判官はこの答えからダニエルとエドワードが騎士であるか悪漢であるかを証明できなかった. 次に裁判官はダニエルに「あなたがた二人 (ダニエルとエドワード) は, 同じタイプ (二人とも騎士, または, 二人とも悪漢) ですか？」と質問した. ダニエルはこの質問に「はい」か「いいえ」で答えた. 裁判官はこの答えを聞いてダニエルとエドワードがそれぞれ騎士であるか悪漢であるかを証明することができた.

ダニエルは騎士か悪漢か？

エドワードは騎士か悪漢か？

裁判官はどのようにしてそれを証明したか？

(4) 被告：フレッド, グレッグ

二人の被告のうち, 一人は長髪でもう一人は短髪であったが, どちらがフレッドでどちらがグレッグかはわからなかった. また, それぞれについて, 騎士であるか悪漢であるかもわからなかった. 裁判官は長髪の被告に「フレッドは騎士ですか？」と質問した. 長髪の被告はこの質問に「はい」か「いいえ」

で答えた．裁判官はこの答えを聞いて, 長髪の被告がフレッドであるかグレッグであるかを証明することができた.

長髪の被告はフレッドかグレッグか？

裁判官はどのようにしてそれを証明したか？

(5) 被告：ヘンリー

ヘンリーは裁判官に「あなた (裁判官) は私が騎士であると証明することはできない.」と証言した.

ヘンリーは騎士か悪漢か？

裁判官はヘンリーが騎士であるか悪漢であるかをこの証言から証明できるか?

3.3　偽コインの発見 (論理)

本物のコインと重さだけが異なる偽コインを, 天秤を使って見つる問題を考えよう．以後は, 本物のコインを真コイン, 重さの異なるコインを偽コインと呼ぶことにする．天秤は, 左右が同じ重さのときに釣合い, 左右の重さが異なるときは重い方に傾く．また, １つの天秤の皿にはコインが何枚でも載せらるものとする．このような天秤を用いて真コインに交じった偽コインを見つける．ただし, 天秤の使用回数はできるだけ少くなるようにしたい.

(1) 3 枚のコイン中, 2 枚が真コインで 1 枚が偽コインであることがわかっている. このとき, 偽コインの発見法を示せ．天秤は最悪何回使用するか.

(2) 9 枚中偽コインが一枚だけ混っている．このとき, 偽コインの発見法を示せ.

(3) 偽コインが真コインより重いことが判っているとする．このとき, 27 枚中に 2 枚の (重さの等しい) 偽コインが交じっている．このとき, 偽コインの発見法を示せ.

(4) 10 個の袋にコインが詰まっている．この中の 1 つの袋には, 偽コインだけが詰まっており, 残りの袋には真コインだけが詰っている．このとき, 偽コインの入った袋を特定したい．ここでは, 偽コインが真コインより $1g$ だけ重いことが判っているものとし, メモリが付いた天秤を用いることができるものとする．このとき, できるだけ天秤の使用回数を少なしくて, 偽コインの入った袋を特定する方法を示せ．ただし, 各袋には十分な数のコインが入っているものとする.

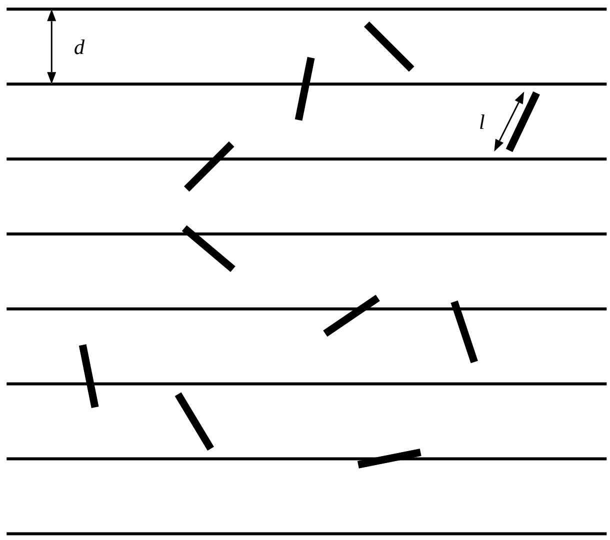

図 1: 罫線上の針

3.4　ビッフォンの針 (確率)

フランス貴族, ジョルジュ・ルイ・レクレール, ビッフォン伯爵 (1707-1788) は, 1777 年に次のような問題を提起した. 「罫線入りの紙の上に短い針を落すとする. そのとき, 針がどれかの線と交わる確率はいくつか？」この問題において, 図 1 のように罫線間の幅 d とし, 針の長さを l としたき, 針が罫線と交わる確率を以下の小問に従って答えよ.

(1) $l \le d$ のとき, 落ちた針と罫線とが無すを角度 θ としたとき, 針が罫線と交わる確率を l,d,θ で表わせ.

(2) $l \le d$ のとき, 針が罫線と交わる確率を l,d で表わせ.

(3) 罫線に針 $l \le d$ の針を落す試行を繰り返しおこなえば, 針と罫線が交わる比率は (2) の確率に漸近していくと考えられる. このような針を落す実験を十分な回数 (N 回) 行なったとき, c 回交わったとする. このとき, π の近似値が, l, d, N,c で表わせることを示せ.

(4) $l > d$ のとき, 落ちた針と罫線とが無すを角度 θ としたとき, 針が罫線と交わる確率を l,d,θ で表わせ.

(5) $l > d$ のとき, 針が罫線と交わる確率を l,d で表わせ.

3.5　15 パズル (代数)

15 パズルはよく知られたパズルで, 次のようなルールで行なわれる.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

図 2: 目標配置

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	*	*
13	14	*	

図 3: 中間配置

(a) ゲーム盤は 4×4 のます目からかなる.

(b) ゲーム盤上には, 1 から 15 の数字が書いてある駒が 1 つのマスに 1 つづつ置いてあり, 1 つのマスが空いている. なお, ゲーム開始時には右下のマスが空いている.

(c) 空マスの隣の駒を空マスに移動できる. このとき, 駒があったマスが新しく空マスになる.

(d) (c) に基づた移動を繰り返して, 駒を図 2 のように数字の順に並べる.

このゲームに関して, 次のことを説明せよ.

(1) どんな配置からでも, 1 を左上に移動できる.

(2) どんな配置からでも, 1 列目 (最上列) をそろえることができる.

(3) どんな配置からでも, 1,2 列目をそろえることができる.

(4) どんな配置からでも, 図 3 のように, 11,12,15 以外の駒をそろえることができる.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

図 4: 正配置

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

図 5: 逆配置

(5) どんな配置からでも, 図 4 かあるいは, 図 5 のいずれかに移動することができる.

(6) 図 4 から, 図 5 に移動することはできない.

3.6 テープ状容器へのコイン詰め込み問題 (幾何)

テープ状の容器にコインを詰め込む問題を考えよう. コインの直径はすべて 1 とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 2×1000 の長方形に, 2000 枚のコインを詰め込む方法を示せ.

(2) 2×1000 の長方形に, 2000 枚を越えるコインを詰め込む方法を示せ.

(3) (2) の詰め込み方で何枚詰め込めるかを示せ.

(4) 3×1000 の長方形にできるだけ多くのコインを詰め込む方法を示し, その方法で詰め込み可能な枚数を示せ.

3.7 折り紙 (幾何)

ユークリッド幾何学は, “直線を引く”, “円を描く” 等の作図法を基にした幾何学である. これに対して, 折り紙は, “折る” という操作を基にした一種の幾何学と考えることができる. ここでは, 折り紙は以下のようなルールに従うものとする.

(a) 折り紙は一辺の長さが 1 の正方形状の理想的な無地の紙とする.

(b) 折り紙は, 角を, 角や “印” に合わせて折ることができる. なお, 角は “印” の一種とみなす. また, 折ってできる線分を折り目といい, 折り目や辺の交点には新たに印を付けることができる.

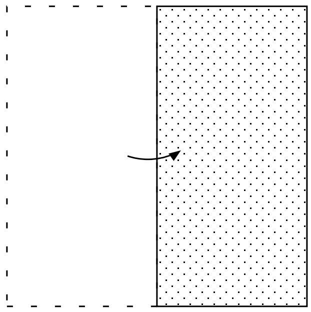

図 6: 初回の折り方 1

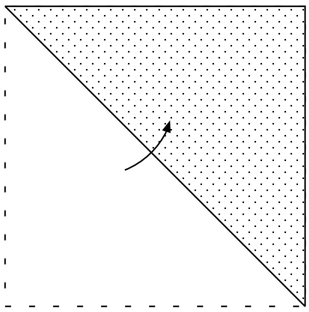

図 7: 初回の折り方 2

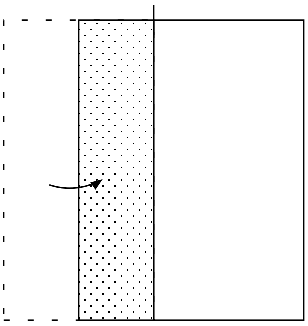

図 8: 折り方 1

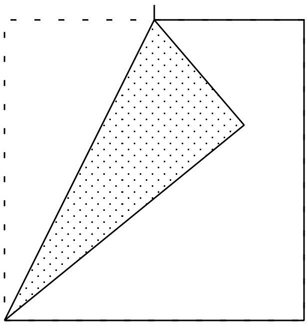

図 9: 折り方 2

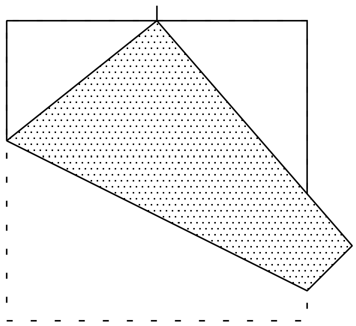

図 10: 折り方 3

(c) 折り紙は 2 つの印を結ぶ直線で折ることができる．その際, 折り目や辺の交点には新たに印を付けることができる．

(d) 1 辺が折り目にそうように, あるいは 1 辺が 2 つの印を通るように, 折り紙を折ることができる．その際, 折り目や辺同士の交点には新たに印を付けることができる．

(e) 任意の折れ目を選んで図形を描くことができる．

折り紙上には, 折る操作だけで, 様々な長さを出現させることができる．まず, この折り紙の基本的な数理を導く．

折り紙の初回の折り方は, 図 6 かあるいは図 7 のいずれかである．

(1) 図 6 の折り方に従い一辺の中点に印を付けておけば,, 次の 3 つの折り方が可能である．(図 8, 図 9, 図 10 参照.)

このとき, 図 10 の折り方に対して, 図 11 に示した長さの関係が成り立つことを示せ．

(2) 長さ 1/4 の位置に角をあてることによって折ったとき, 図 12 に示した長さの関係が成り立つことを示せ．

次に, 折紙上に, 立方体の展開図を作図することを考える．以下の設問に答えよ．

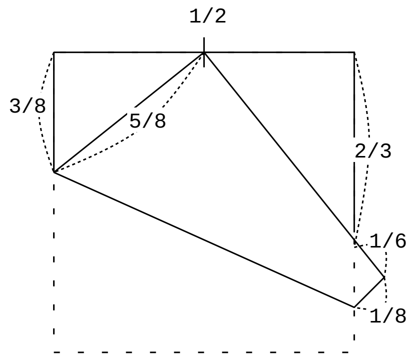

図 11: 長さの関係 1

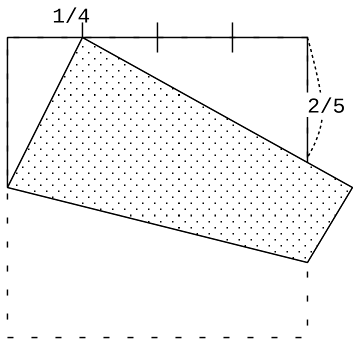

図 12: 長さの関係 2

(3) 立方体の展開図を全種類描きだせ.

(4) 正方形中に立方体の展開図を埋め込め. ただし, それぞれの展開図において, 立方体の一辺が最も長くなるようにせよ.

(5) 折る操作だけで, 折紙中に立方体の展開図を作図せよ. ただし, なるべく立方体の一辺が長くなるようにすること.

3.8　一筆書き (グラフ)

ケーニッヒベルグの町は, 川によって 4 つの部分に分かれていて, 図 13 に示すように 7 本の橋によって相互に連結されている.

ケーニッヒベルグの市民たちは, どの橋も正確に一度だけ渡って出発点に立ち戻る方法を探していた. しかし, どの場所から始めても, またどんなに試みても, そのようなことが出きなかった.

この問題は, 下図のように, 町の区画を点として, 橋による接続関係を辺とする図形 (グラフ) にすると考えやすい. 問題は, 図形が一筆書きできるかどうかと同じ

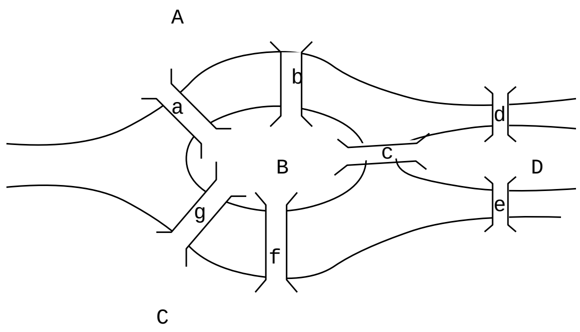

図 13: ケーニッヒベルグの橋

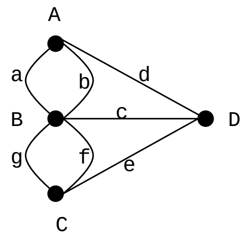

図 14: ケーニッヒベルグ地区に対応するグラフ

である.

そこで, 一筆書きのできる図形の性質を調べることにする.

(1) 図 15 の図形を一筆書きできるものと, できないものに分類せよ.

(2) 一筆書きできない図形に, 新たな辺を加えて一筆できようにせよ. ただし, 加える辺はできるだけ少なくすること.

(3) 一筆書きできるものを, 書き始めが特定されているものと, 特定されないものとに分類せよ.

(3) すべての図形に対して, 各点に接続する辺数を調べよ.

(4) どのような図形が一筆書きできるのかを説明せよ. また, なぜ一筆書きできるのかを説明せよ.

3.9 地図の色塗り問題 (グラフ)

白地図に色を塗ることを考える. ただし, 隣り合う地区には同じ色を塗ることなしに, できるだけ少ない色で塗りたい.

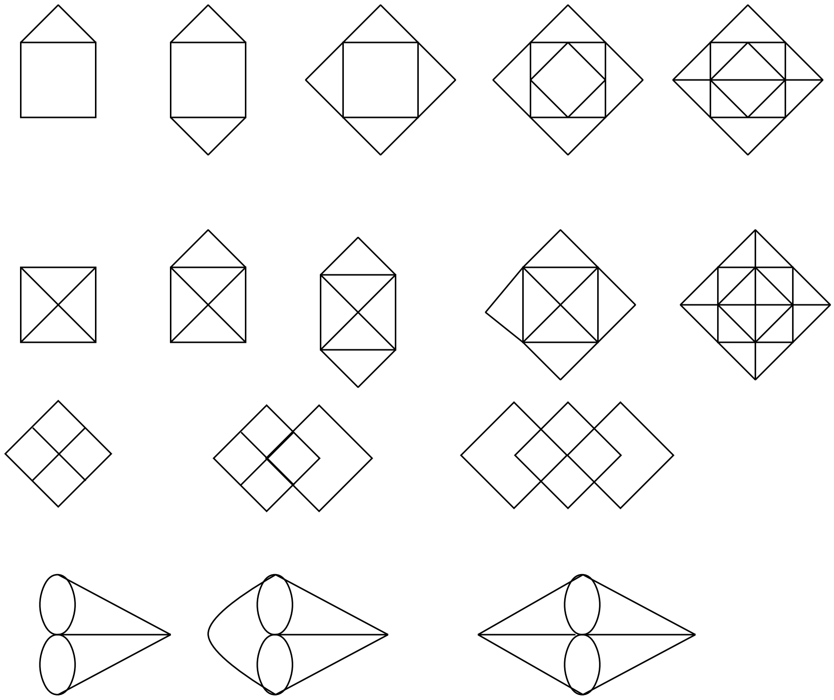

図 15: いろいろなグラフ

(1) 図 16 の日本地図を, できるだけ少ない色で塗り分けよ.

(2) 図 17 のアメリカ地図を, できるだけ少ない色で塗り分けよ.

(3) 地図の各区画を点とし, 隣接関係を辺とするような平面グラフを考えることができる. この平面グラフでは, 点数を v, 辺数を e, 面数を f とすると,

$$v - e + f = 2$$

という関係式が成り立つ. このことを説明せよ.

(4) 「どんな平面グラフでも, 接続する辺数が 5 以下である点が存在する.」そうである. なぜか, 説明せよ.

(5) 「どんな地図でも, 6 色用いれば塗り分けることができる.」そうである. なぜか説明せよ.

(6) 「どんな地図でも, 5 色用いれば塗り分けることができる.」そうである. なぜか説明せよ.

図 16: 日本地図

3.10 美術館の監視 (幾何+グラフ)

図 18 のような複雑な見取り図を持つ美術館を監視することを考える．この美術館には柱がなく，すべて壁だけでできている．その美術館の壁は (ガラス等ではない) 通常の素材でできており，監視員は壁を透視することはできない．また，監視員は美術館のある場所 (詰所) に常駐しており動き回らないが，詰所の中で顔を回すことで，360 度のすべて監視することができる．このような美術館において壁の枚数が n のときに，美術館内のすべての場所を監視できるような監視員 (詰所) の数をできるだけ少なくなるようにしたい．

(1) 図 18 の美術館の内部を 3 角形に分割せよ．

(2) (1) の三角形の数を示せ．

(3) (1) の美術館を 6 人で監視できるように，詰所の場所を定めよ．

(4) 壁の枚数が n 枚であるようなどんな美術館も，監視員の数が $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ で監視できることを説明せよ．

(5) 監視員の数が $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 人必要となるような n 枚の壁から出来ている美術館の形状を示せ．

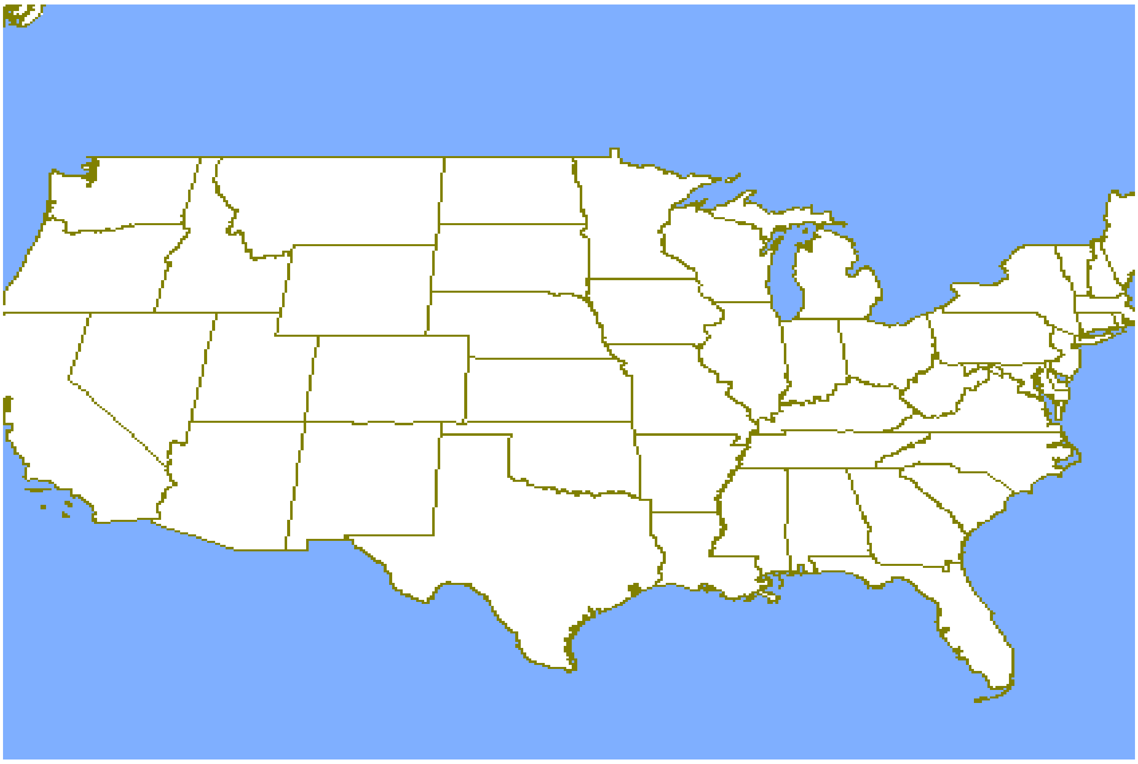

図 17: アメリカ合衆国地図

3.11 数の多さ (集合)

ある 2 つの集合 X と Y が与えられたき, X の要素と Y の要素との間に 1 対 1 の対応を作ることができるとき, 「X の濃度と Y の濃度は等しい」と言う.

例: 集合 A を 5 個のリンゴからなる集合とし, 集合 B を 5 個のミカンからなる集合とする. このとき, 集合 A からリンゴを一つ, 集合 B からミカンを一つ適当に選んで組を作っていくと, リンゴもミカンも余らない. 従って集合 A と集合 B の濃度は等しい.

そうではなく, X の要素と Y の要素との間に 1 対 1 の対応を作ろうとすると, どのように対応させても X の要素が余るときには, 「X の濃度は Y の濃度より大きい」と言う.

例：集合 C を 7 個のレモンからなる集合とする. このとき, 集合 A からリンゴを一つ, 集合 C からレモンを一つ選んで組を作っていくと, どのように組の作り方を選んでも最終的にレモンが余る. 従って, 集合 C の濃度は集合 A の濃度より大きい.

このように, 有限の要素からなる集合に対しては, その集合の濃度は要素の個数を指す. これと同じことを要素の数が無限であるような集合に対しても考える.

(1) 全ての自然数からなる集合 N と全ての有理数からなる集合 Q の濃度は等しい

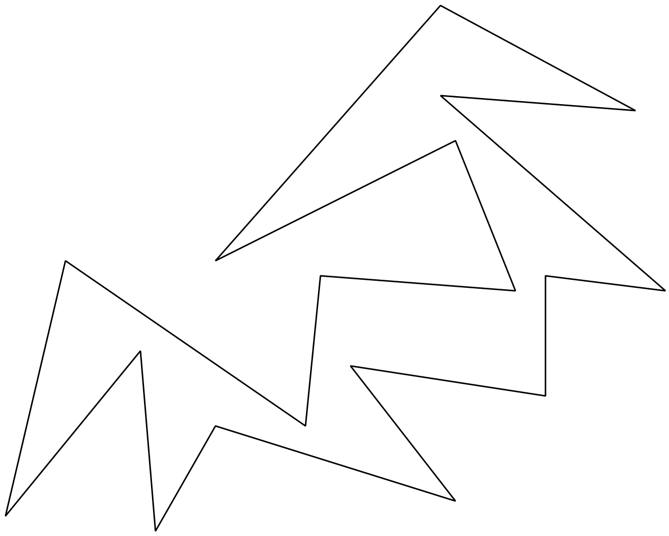

図 18: 美術館の見取り図

かどうかを判定し, その理由を説明せよ. 等しくない場合には, どちらが大きいかも説明せよ.

(2) 全ての有理数からなる集合 Q の濃度と, 全ての無理数からなる集合 ($R-Q$：全ての実数から全ての有理数を除いた集合) の濃度は等しいかどうかを判定し, その理由を説明せよ. 等しくない場合には, どちらが大きいかも説明せよ.

3.12 暗号 (整数)

田中さんは佐藤さんから銀行口座の暗証番号を教えてもらう約束をしている. 暗証番号 x は 4 桁の整数である.

しかし, 田中さんと佐藤さんの間の連絡手段は駅の伝言板だけであり, 他の連絡手段は使えない. そこで, 以下のような暗号を使って佐藤さんから田中さんへ暗証番号を伝えることにする.

◇田中さんがすること (準備)

P1 3 桁の素数を 2 つ用意する. それぞれを p と q とする.

P2 $n = pq$ と $f = (p-1)(q-1)$ を求める.

P3 f と互いに素であるような整数 c を用意する. (f と c の最大公約数が 1.)

P4 n の値と c の値を伝言板に書いておく.

◆佐藤さんがすること (暗号化)

C1 伝言板を見て n の値と c の値をメモする.

C2 暗証番号 x に対して, x の c 乗を n で割った余り y を計算する. $(y \equiv x^c \pmod{n})$.

C3 y の値を伝言板に書いておく.

◇田中さんがすること (復号)

D1 伝言板を見て, y の値をメモする.

D2 c と d の積を f で割った余りが 1 になるような整数 d を用意する. $(cd \equiv 1 \pmod{f})$

D3 y,d および n を使って x の値を計算する.

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) y,d,n から x の値を計算する (暗号を元に戻す=復号) 方法を示せ.

(2) 田中さん以外の人が暗号を解読できない理由, すなわち, 掲示板に書かれた情報 (n, c, y) だけを使って x を計算することが難しいのは, 整数のどのような性質を利用しているかを説明せよ.

(3) 田中さんと佐藤さんはじゃんけんで勝負することになった. しかし, 田中さんと佐藤さんの間の連絡手段は駅の伝言板だけであり, 他の連絡手段は使えない. 上記問題 A の暗号の方法を参考に, 田中さんと佐藤さんの双方が納得できる (どちらも「ずる」ができない) じゃんけんの方法を考えよ.