「解析学 **Ib**」

第 1 回：関数の極限と連続性

問題 1. 関数の極限

次の極限を調べよ．

(1)

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - 2x - 8} \tag{1}$$

（ヒント：分母・分子を因数分解．）

(2)

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \tag{2}$$

（ヒント：$t = -x$ とおき，分母・分子に $\sqrt{t^2 - t + 1} + t$ をかける．）

(3)

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} \tag{3}$$

（ヒント：ハサミウチの原理．）

(4)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|} \tag{4}$$

（ヒント：x の正負で場合分け．）

(5)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x} \quad (a \neq 0) \tag{5}$$

（ヒント：$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$）

(6)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} \quad (0 < a \neq 1) \tag{6}$$

（ヒント：$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（底の変換公式），$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$）

問題 2. 関数の連続性

(1) 次の関数の $x=0$ における連続性を調べよ．

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases} \tag{7}$$

（ヒント：関数 $f(x)$ が点 a で連続 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$）

(2) 次の関数の $x=-1$ における連続性を調べよ．

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1} & (x\neq -1)\\ \dfrac{1}{2} & (x=-1)\end{cases} \tag{8}$$

（ヒント：関数 $f(x)$ が点 a で連続 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$）

「解析学 **Ib**」

第 1 回：関数の極限と連続性　【解答】

問題 1. 関数の極限

次の極限を調べよ.

(1)

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8} \tag{1}$$

（ヒント：分母・分子を因数分解.）

【解答】

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+3)(x-2)}{(3x+4)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{3x+4}=\frac{7}{10} \tag{2}$$

(2)

$$\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x) \tag{3}$$

（ヒント：$t=-x$ とおき，分母・分子に $\sqrt{t^2-t+1}+t$ をかける.）

【解答】

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)=\lim_{t\to +\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-t)\\
&=\lim_{t\to +\infty}\frac{(\sqrt{t^2-t+1}-t)(\sqrt{t^2-t+1}+t)}{\sqrt{t^2-t+1}+t}\\
&=\lim_{t\to +\infty}\frac{(t^2-t+1)-t^2}{\sqrt{t^2-t+1}+t}=\lim_{t\to +\infty}\frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t+1}+t}\\
&=\lim_{t\to +\infty}\frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=-\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{4}$$

(3)

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} \tag{5}$$

（ヒント：ハサミウチの原理.）

【解答】

$$0\leq\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|\to 0\quad(\text{as } x\to 0) \tag{6}$$

したがってハサミウチノ原理より

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0 \tag{7}$$

(4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|} \tag{8}$$

（ヒント：x の正負で場合分け.）

【解答】

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x}=1,\quad \lim_{x\to-0}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to-0}\frac{x}{-x}=-1 \tag{9}$$

右極限と左極限が一致しないので $\lim_{x\to0}\frac{x}{|x|}$ は存在しない．

(5)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}\quad(a\neq0) \tag{10}$$

（ヒント：$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$）

【解答】

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}=a\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=a \tag{11}$$

(6)

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}\quad(0<a\neq1) \tag{12}$$

（ヒント：$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（底の変換公式），$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e$）

【解答】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\frac{\ln(1+x)}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\&=\frac{1}{\ln a}\ln\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\ln a}\ln e=\frac{1}{\ln a}\end{aligned} \tag{13}$$

問題 2．関数の連続性

(1) 次の関数の $x=0$ における連続性を調べよ．

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & (x\neq0)\\ 1 & (x=0)\end{cases} \tag{14}$$

（ヒント：関数 $f(x)$ が点 a で連続 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$）

【解答】

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1=f(0) \tag{15}$$

よって，$f(x)$ は $x=0$ で連続．

(2) 次の関数の $x=-1$ における連続性を調べよ．

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1} & (x\neq-1)\\ \dfrac{1}{2} & (x=-1)\end{cases} \tag{16}$$

（ヒント：関数 $f(x)$ が点 a で連続 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$）

【解答】

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} = f(-1) \tag{17}$$

よって，$f(x)$ は $x = -1$ で連続.

「解析学 **Ib**」

第 2 回：微分の定義と性質

問題 1．微分の定義と微分可能性

(1) 定義に従って，次の関数の導関数を求めよ．

$$f(x) = x^3 \tag{1}$$

（ヒント：$f'(x) := \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$．$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$）

(2) 定義に従って，次の関数の導関数を求めよ．

$$f(x) = \sin x \tag{2}$$

（ヒント：$f'(x) := \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$．$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$（加法定理））

(3) 定義に従って，次の関数の導関数を求めよ．

$$f(x) = \sqrt{x} \tag{3}$$

（ヒント：$f'(x) := \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$．分母・分子に $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ をかける．）

(4) 次の関数は $x = 0$ で微分可能か．

$$f(x) = |x| \tag{4}$$

（ヒント：$f(x)$ が点 a で微分可能 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 極限値 $f'(a) := \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在する（左極限と右極限が一致する））

問題 2. 微分の基本公式

(1) 微分の定義に従って，次の公式を示せ（微分の線形性）.

$$[\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \tag{5}$$

（ヒント： $[\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{[\alpha f(x+h) + \beta g(x+h)] - [\alpha f(x) + \beta g(x)]}{h}$）

(2) 微分の定義に従って，次の公式を示せ（積の微分公式）.

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{6}$$

（ヒント： $[f(x)g(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$）

(3) 微分の定義に従って，次の公式を示せ（商の微分公式）.

$$\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} \tag{7}$$

（ヒント： $\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{g(x+h)}{f(x+h)} - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$）

「解析学 **Ib**」

第 2 回：微分の定義と性質　【解答】

問題 1．微分の定義と微分可能性

(1) 定義にしたがって，次の関数の導関数を求めよ．

$$f(x) = x^3 \tag{1}$$

（ヒント：$f'(x) := \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$．$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$）

【解答】

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2 \end{aligned} \tag{2}$$

(2) 定義にしたがって，次の関数の導関数を求めよ．

$$f(x) = \sin x \tag{3}$$

（ヒント：$f'(x) := \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$．$\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x \sin h$（加法定理））

【解答】　導関数の定義および加法定理を用いれば

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x \end{aligned} \tag{4}$$

【参考】　ここで $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ および $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ を用いたが，これらは次のようにして示される．中心角が x の扇形（図 1 参照）を考えれば，面積について $\triangle OAP <$ 扇形 $OAP < \triangle OAT$ より

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \quad \Longrightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{5}$$

$x \to 0$ の極限をとれば，はさみうちの原理より与式が得られる．$x < 0$ に関しては $-x \to x$ と置き換え，三角関数の偶奇性を用いれば示される．また

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x + 1} = -1\cdot 0 = 0 \tag{6}$$

(3) 定義にしたがって，次の関数の導関数を求めよ．

$$f(x) = \sqrt{x} \tag{7}$$

（ヒント：$f'(x) := \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$．分母・分子に $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ をかける．）

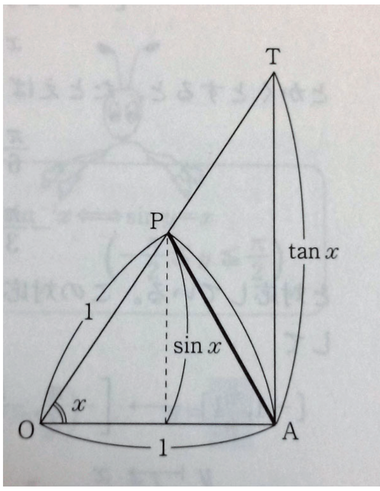


図 1

【解答】

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

(4) 次の関数は $x=0$ で微分可能か.

$$
f(x) = |x| \qquad (9)
$$

（ヒント：$f(x)$ が点 a で微分可能 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 極限値 $f'(a) := \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在する（左極限と右極限が一致する））

【解答】

$$
\lim_{h\to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to +0}\frac{h}{h} = 1 \qquad (10)
$$

$$
\lim_{h\to -0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to -0}\frac{-h}{h} = -1 \qquad (11)
$$

よって，右極限と左極限が一致しないので $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ は存在しない．即ち，$f(x)$ は $x=0$ において微分可能ではない.

問題 2. 微分の基本公式

(1) 微分の定義に従って，次の公式を示せ（微分の線形性）.

$$
[\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \qquad (12)
$$

（ヒント： $[\alpha f(x)+\beta g(x)]' = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{[\alpha f(x+h)+\beta g(x+h)]-[\alpha f(x)+\beta g(x)]}{h}$）

【解答】

$$
\begin{aligned}
[\alpha f(x)+\beta g(x)]' &= \lim_{h\to 0}\frac{[\alpha f(x+h)+\beta g(x+h)]-[\alpha f(x)+\beta g(x)]}{h} \\
&= \alpha\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\beta\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \alpha f'(x)+\beta g'(x) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

(2) 微分の定義に従って，次の公式を示せ（**積の微分公式**）.

$$
[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad (14)
$$

（ヒント：$[f(x)g(x)]' = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$）

【解答】

$$
\begin{aligned}
[f(x)g(x)]' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x) \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

(3) 微分の定義に従って，次の公式を示せ（**商の微分公式**）.

$$
\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]' = \frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)} \qquad (16)
$$

（ヒント：$\left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]' = \lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left[\dfrac{g(x+h)}{f(x+h)}-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$）

【解答】

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \quad \text{(通分した)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \quad (f(x)g(x)\ \text{を引いて足した}) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

「解析学 **Ib**」

第 3 回：合成関数・逆関数の微分

問題 1．合成関数・逆関数の微分

(1) $y = f(u),\ u = g(x)$ の合成関数 $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ に関する微分公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{または} \quad [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) \tag{1}$$

が成立することを説明せよ．

（コメント：証明でもよいが，少し難しいので説明でよい．）

(2) 関数 f の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ ($\Leftrightarrow\ x = f(y)$) の微分公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{または} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{2}$$

を証明せよ．

（ヒント：$x = f(f^{-1}(x))$ の両辺を x で微分する．右辺を微分する際，合成関数の微分公式 (1) を用いる．）

問題 2．基本的応用

次の関数の導関数を求めよ．

(1)

$$y = \ln x \quad (x > 0) \tag{3}$$

（ヒント：式 (3) は $x = e^y$ とかけるので，この式の両辺を x で微分する．合成関数の微分公式 (1) および逆関数の微分公式 (2) を用いる．）

(2)

$$y = x^\alpha \quad (x > 0,\ \alpha \in \mathbf{R}) \tag{4}$$

（ヒント： 両辺の自然対数をとってから微分する（**対数微分法**）．対数法則 $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$ および合成関数の微分公式 (1) を用いる．）

(3)

$$y = a^x \quad (a > 0) \tag{5}$$

（ヒント： 対数微分法および対数法則 $\ln a^x = x \ln a$ を用いる．）

(4)

$$y = \sin^{-1} x \tag{6}$$

（ヒント： 式 (6) は $x = \sin y$ とかけるので，この式の両辺を x で微分して，合成関数の微分公式 (1) および逆関数の微分公式 (2) を用いる．）

(5)

$$y = \tan^{-1} x \tag{7}$$

（ヒント： 式 (7) は $x = \tan y$ とかけるので，この式の両辺を x で微分して，合成関数の微分公式 (1) および逆関数の微分公式 (2) を用いる．）

「解析学 Ib」

第 3 回：合成関数・逆関数の微分　【解答】

問題 1．合成関数・逆関数の微分

(1) $y = f(u),\ u = g(x)$ の合成関数 $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ に関する微分公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{または} \quad [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) \tag{1}$$

が成立することを説明せよ．

（コメント：証明でもよいが，少し難しいので説明でよい．）

【解答】　微分の定義より

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}, \quad f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \tag{2}$$

lim の記号は $\Delta x,\ \Delta u$ が小さいこと表していると考えると，2 つの式はそれぞれ

$$\Delta u := g(x + \Delta x) - g(x) \simeq g'(x)\Delta x, \quad \Delta y := f(u + \Delta u) - f(u) \simeq f'(u)\Delta u \tag{3}$$

を意味する．1 つ目の式は x が $x + \Delta x$ へ変化したときの u の変化量 Δu が $g'(x)\Delta x$ であることを表し，2 つ目の式は u が $u + \Delta u$ へ変化したときの y の変化量 Δy が $f'(u)\Delta u$ であることを表している．

知りたいのは，x が少しだけ変化したとき y がどれだけ変化するかであるから，上の二つの式から Δu を消去すると

$$\Delta y = f'(u)g'(x)\Delta x \tag{4}$$

両辺を Δx で割り，$\Delta x \to 0$ の極限を取れば

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)g'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{5}$$

(2) 関数 f の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ $(\Leftrightarrow\ x = f(y))$ の微分公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \quad \text{または} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{6}$$

を証明せよ．

（ヒント：$x = f(f^{-1}(x))$ の両辺を x で微分する．右辺を微分する際，合成関数の微分公式 (1) を用いる．）

【解答】　$x = f(y),\ y = f^{-1}(x)$ から y を消去すれば

$$x = f(f^{-1}(x)) \tag{7}$$

この式の両辺を x で微分するが，合成関数の微分公式を用いれば

$$1 = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) \quad \Longrightarrow \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{8}$$

この式は $x = f(y),\ y = f^{-1}(x)$ を考慮すると次のようにも書くことができる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \tag{9}$$

問題 2. 基本的応用

次の関数の導関数を求めよ.

(1)

$$y = \ln x \quad (x > 0) \tag{10}$$

（ヒント：式 (10) は $x = e^y$ とかけるので，この式の両辺を x で微分する．合成関数の微分公式 (1) および逆関数の微分公式 (6) を用いる.）

【解答】　逆関数の微分公式を用いれば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}e^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \tag{11}$$

(2)

$$y = x^\alpha \quad (x > 0,\ \alpha \in \mathbf{R}) \tag{12}$$

（ヒント： 両辺の自然対数をとってから微分する（**対数微分法**）．対数法則 $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$ および合成関数の微分公式 (1) を用いる.）

【解答】　両辺の自然対数をとると

$$\ln y = \alpha \ln x \tag{13}$$

この式の両辺を x で微分するが，左辺には合成関数の微分を用いる.

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{\alpha}{x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \tag{14}$$

(3)

$$y = a^x \quad (a > 0) \tag{15}$$

（ヒント： 対数微分法および対数法則 $\ln a^x = x \ln a$ を用いる.）

【解答】　両辺の自然対数を取ってから微分する.

$$\ln y = x \ln a \quad \Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \ln a \quad \Longrightarrow \quad y' = y \ln a = a^x \ln a \tag{16}$$

(4)

$$y = \sin^{-1} x \tag{17}$$

（ヒント： 式 (17) は $x = \sin y$ とかけるので，この式の両辺を x で微分して，合成関数の微分公式 (1) および逆関数の微分公式 (6) を用いる.）

【解答】　$x = \sin y$ であるから，逆関数の微分公式を用いて

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{18}$$

(5)

$$y = \tan^{-1} x \tag{19}$$

（ヒント： 式 (19) は $x = \tan y$ とかけるので，この式の両辺を x で微分して，合成関数の微分公式 (1) および逆関数の微分公式 (6) を用いる.）

【解答】　$x = \tan y$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \tag{20}$$

「解析学 Ib」

第 4 回：積分計算に役立つ微分公式

次の関数の導関数を求めよ．

(1)

$$y = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (-1 \neq \alpha \in \mathbf{R}) \tag{1}$$

（ヒント：$u = x - a$, $y = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ とおき，合成関数の微分公式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ を用いる．不定積分の公式 $\displaystyle\int (x-a)^\alpha dx = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ を証明したことになる.）

(2)

$$y = \ln|x \pm a| \tag{2}$$

（ヒント：$u = x \pm a$ とおき，合成関数の微分公式を用いる．不定積分の公式 $\displaystyle\int \frac{1}{x \pm a} dx = \ln|x \pm a|$ を証明したことになる.）

(3)

$$y = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0) \tag{3}$$

（ヒント：$u = \dfrac{x}{a}$ とおき，合成関数の微分公式を用いる．不定積分の公式 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ を証明したことになる.）

(4)

$$y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (a \neq 0) \tag{4}$$

（ヒント：対数法則 $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$ を用いた後，$u = x \pm a$ とおき，合成関数の微分公式を用いる．不定積分の公式 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$ を証明したことになる.）

(5)

$$y = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (a > 0) \tag{5}$$

（ヒント：$u = \dfrac{x}{a}$ とおき，合成関数の微分公式を用いる．不定積分の公式 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ を証明したことになる.）

(6)

$$y = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) \quad (a > 0) \tag{6}$$

（ヒント：積の微分公式，$u = a^2 - x^2$ とおいた合成関数の微分，設問 (5) の結果を用いる．不定積分の公式 $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right)$ を証明したことになる.）

「解析学 Ib」

第 4 回：積分計算に役立つ微分公式　【解答】

次の関数の導関数を求めよ．

(1)

$$y = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (-1 \neq \alpha \in \mathbf{R}) \tag{1}$$

（ヒント：$u = x - a,\ y = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ とおき，合成関数の微分公式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ を用いる．不定積分の公式 $\displaystyle\int (x-a)^\alpha dx = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ を証明したことになる.）

【解答】　$u = x - a$ とおくと $y = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$．合成関数の微分法を用いると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\frac{d}{dx}(x-a) = u^\alpha \cdot 1 = (x-a)^\alpha \tag{2}$$

(2)

$$y = \ln|x \pm a| \tag{3}$$

（ヒント：$u = x \pm a$ とおき，合成関数の微分公式を用いる．不定積分の公式 $\displaystyle\int \frac{1}{x \pm a} dx = \ln|x \pm a|$ を証明したことになる.）

【解答】　$u_\pm = x \pm a$ とおくと $y = \ln|u_\pm|$．合成関数の微分法を用いれば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du_\pm}\frac{du_\pm}{dx} = \frac{d}{du_\pm}(\ln|u_\pm|)\frac{d}{dx}(x \pm a) = \frac{1}{u_\pm} \cdot 1 = \frac{1}{x \pm a} \tag{4}$$

(3)

$$y = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad (a \neq 0) \tag{5}$$

（ヒント：$u = \dfrac{x}{a}$ とおき，合成関数の微分公式を用いる．不定積分の公式 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ を証明したことになる.）

【解答】　$u = \frac{x}{a}$ とおくと $y = \frac{1}{a}\tan^{-1}u$．合成関数の微分法を用いれば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}u\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a^2+x^2} \tag{6}$$

(4)

$$y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (a \neq 0) \tag{7}$$

（ヒント：対数法則 $\ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$ を用いた後，$u = x \pm a$ とおき，合成関数の微分公式を用いる．不定積分の公式 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ を証明したことになる.）

【解答】　対数法則を用いれば

$$y = \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) \tag{8}$$

この式の両辺を x で微分する（不慣れな者は $u_{\pm} = x \pm a$ を導入して合成関数の微分法を忠実に使う）．

$$y' = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{x^2-a^2} \tag{9}$$

(5)

$$y = \sin^{-1}\frac{x}{a} \quad (a > 0) \tag{10}$$

（ヒント：$u = \dfrac{x}{a}$ とおき，合成関数の微分公式を用いる．不定積分の公式 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ を証明したことになる.）

【解答】　$u = \frac{x}{a}$ とおくと $y = \sin^{-1} u$．合成関数の微分法を用いれば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\sin^{-1} u\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{11}$$

(6)

$$y = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) \quad (a > 0) \tag{12}$$

（ヒント：積の微分公式，$u = a^2 - x^2$ とおいた合成関数の微分，設問 (5) の結果を用いる．不定積分の公式 $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$ を証明したことになる.）

【解答】　積の微分公式および $(\sin^{-1}\frac{x}{a})' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ を用いて

$$\begin{aligned} 2y' &= \sqrt{a^2-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} + a^2\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\left((a^2-x^2) - x^2 + a^2\right) = 2\sqrt{a^2-x^2} \end{aligned} \tag{13}$$

よって $y' = \sqrt{a^2-x^2}$.

「解析学 Ib」

第 5 回：高次導関数

問題 1. n 次導関数に関する基本公式

次の公式を示せ.

(1)

$$\frac{d^n}{dx^n}x^\alpha = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \tag{1}$$

（ヒント：$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ を n 回用いる.）

(2)

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{\alpha x} = \alpha^n e^{\alpha x} \tag{2}$$

（ヒント：$\alpha x = u$ とおき，合成関数の微分公式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ および $\dfrac{d}{du}e^u = e^u$ を用いる.）

(3)

$$\frac{d^n}{dx^n}f(ax+b) = a^n f^{(n)}(ax+b) \tag{3}$$

（ヒント：$u = ax+b$ とおき，合成関数の微分公式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ を n 回用いる.）

(4)

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) \tag{4}$$

（ヒント：$(\sin x)' = \cos x$ と $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ を n 回用いる.）

(5)

$$\frac{d^n}{dx^n}\ln(x+1) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x+1)^n}, \quad x > -1 \tag{5}$$

（ヒント：$(\ln(x+1))' = (x+1)^{-1}$ および公式 (1) を用いる.）

「解析学 **Ib**」

第5回：高次導関数　【解答】

問題1. n 次導関数に関する基本公式

次の公式を示せ.

(1)

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{\alpha} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \tag{1}$$

（ヒント：$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ を n 回用いる.）

【解答】

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1} \tag{2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}x^{\alpha} = \frac{d}{dx}\left(\alpha x^{\alpha-1}\right) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \tag{3}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}x^{\alpha} = \frac{d}{dx}\left(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\right) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3} \tag{4}$$

であり，一般的には与式が成立する（厳密には数学的帰納法を用いる）.

(2)

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{\alpha x} = \alpha^n e^{\alpha x} \tag{5}$$

（ヒント：$\alpha x = u$ とおき，合成関数の微分公式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ および $\dfrac{d}{du}e^u = e^u$ を用いる.）

【解答】　$u = \alpha x$ とおいて合成関数の微分法を用いると

$$\frac{d}{dx}e^{\alpha x} = \frac{d}{du}e^u\frac{d}{dx}(\alpha x) = e^u\cdot\alpha = \alpha e^{\alpha x} \tag{6}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{\alpha x} = \frac{d}{dx}(\alpha e^{\alpha x}) = \alpha^2 e^{\alpha x} \tag{7}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}e^{\alpha x} = \frac{d}{dx}(\alpha^2 e^{\alpha x}) = \alpha^3 e^{\alpha x} \tag{8}$$

であり，一般的には与式が成立する（厳密には数学的帰納法を用いる）.

(3)

$$\frac{d^n}{dx^n}f(ax+b) = a^n f^{(n)}(ax+b) \tag{9}$$

（ヒント：$u = ax+b$ とおき，合成関数の微分公式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ を n 回用いる.）

【解答】　$u = \alpha x$ とおくと

$$\frac{d}{dx}f(ax+b) = \frac{d}{du}f(u)\frac{d}{dx}(ax+b) = f'(u)\cdot a = af'(ax+b) \tag{10}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(ax+b) = \frac{d}{dx}[af'(ax+b)] = a^2 f''(ax+b) \tag{11}$$

以下同様にして与式が成立することがわかる.

(4)

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) \tag{12}$$

（ヒント：$(\sin x)' = \cos x$ と $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ を n 回用いる.）

【解答】

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{13}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \tag{14}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \tag{15}$$

以下同様にすれば与式が成立することがわかる.

(5)

$$\frac{d^n}{dx^n}\ln(x+1) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x+1)^n}, \quad x > -1 \tag{16}$$

（ヒント：$(\ln(x+1))' = (x+1)^{-1}$ および公式 (1) を用いる.）

【解答】

$$\frac{d}{dx}\ln(x+1) = (1+x)^{-1} = (-1)^0 0!(1+x)^{-1} \tag{17}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln(x+1) = \frac{d}{dx}(1+x)^{-1} = (-1)(1+x)^{-2} = (-1)^1 1!(1+x)^{-2} \tag{18}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\ln(x+1) = \frac{d}{dx}[(-1)(1+x)^{-2}] = (-1)(-2)(1+x)^{-3} = (-1)^2 2!(1+x)^{-3} \tag{19}$$

以下同様にすれば与式が成立することがわかる.

「解析学 Ib」

第 6 回：平均値の定理

問題 1．意味と表し方

(1) 関数 $f(x)$ が $[a, b]$ で連続であり，(a, b) で微分可能とする．そのとき，

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad a < c < b \tag{1}$$

となる c が少なくとも一つ存在する（**平均値の定理**）．この定理が意味するところを座標平面上に図示せよ．

(2) 新たな定数

$$\theta := \frac{c - a}{b - a} \tag{2}$$

を導入する．式 (2) を用いて c を消去すれば，式 (1) は

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a + \theta(b - a)), \quad 0 < \theta < 1 \tag{3}$$

と書かれることを示せ．

（注意：式 (3) は平均値の定理の一つの表し方である．また，平均値の定理がテーラーの定理の特別な場合であることを表している.）

(3) 新たな定数

$$h := b - a \tag{4}$$

を導入する．式 (4) を用いて b を消去すれば，式 (3) は

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1 \tag{5}$$

と書かれることを示せ．

（注意：式 (5) は平均値の定理の一つの表し方である．また，平均値の定理がテーラーの定理の特別な場合であることを表している.）

問題 2. 具体例と応用

(1) $f(x) = x^2$ のとき，式 (5) における θ の値を求めよ．

(2) $0 < a < b$ のとき，不等式

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a} \tag{6}$$

が成立することを示せ．

（ヒント：$f(x) = \ln x = \log_e x$ に平均値の定理 (1) を適用する．また，$0 < a < c < b$ のとき，$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$ であることを用いる．）

「解析学 Ib」

第 6 回：平均値の定理　【解答】

問題 1．意味と表し方

(1) 関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続であり，(a,b) で微分可能とする．そのとき，

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad a < c < b \tag{1}$$

となる c が少なくとも一つ存在する（**平均値の定理**）．この定理が意味するところを座標平面上に図示せよ．

【解答】　略.

(2) 新たな定数

$$\theta := \frac{c-a}{b-a} \tag{2}$$

を導入する．式 (2) を用いて c を消去すれば，式 (1) は

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a+\theta(b-a)), \quad 0 < \theta < 1 \tag{3}$$

と書かれることを示せ．

（注意：式 (3) は平均値の定理の一つの表し方である．また，平均値の定理がテーラーの定理の特別な場合であることを表している.）

【解答】　式 (2) より $c = a + \theta(b-a)$．これを式 (1) へ代入すれば式 (3) を得る．また，$a < c < b$ であるから $0 < \theta < 1$ は明らか.

(3) 新たな定数

$$h := b - a \tag{4}$$

を導入する．式 (4) を用いて b を消去すれば，式 (3) は

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1 \tag{5}$$

と書かれることを示せ．

（注意：式 (5) は平均値の定理の一つの表し方である．また，平均値の定理がテーラーの定理の特別な場合であることを表している.）

【解答】　式 (4) より $b = a + h$．これを式 (3) へ代入すると式 (5) を得る．

問題 2. 具体例と応用

(1) $f(x) = x^2$ のとき，式 (5) における θ の値を求めよ．

【解答】 $f(x) = x^2$ とすると $f'(x) = 2x$ であることに気を付けて，(5) を書き下せば

$$(a+h)^2 = a^2 + h \cdot 2(a + \theta h) \tag{6}$$

$$\Longrightarrow \quad a^2 + 2ah + h^2 = a^2 + 2ah + 2\theta h^2 \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{1}{2} \tag{7}$$

(2) $0 < a < b$ のとき，不等式

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a} \tag{8}$$

が成立することを示せ．

（ヒント：$f(x) = \ln x = \log_e x$ に平均値の定理 (1) を適用する．また，$0 < a < c < b$ のとき，$\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$ であることを用いる.）

【解答】 $f(x) = \ln x$ とすると $f'(x) = \frac{1}{x}$ であることに注意して，平均値の定理 (1) を書き下せば

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b - a}, \quad 0 < a < c < b \tag{9}$$

また，$0 < a < c < b$ より

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \tag{10}$$

である．上の二式から c を消去すれば，示すべき不等式が得られる．

「解析学 Ib」

第 7 回：テイラーの定理（1）

関数 $f(x)$ が $(n-1)$ 回微分可能で，$f^{(n-1)}(x)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能とする．そのとき，

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n \\ R_n &= \frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n, \quad 0<\theta<1 \end{aligned} \tag{1}$$

となる θ が存在する（**テイラーの定理**）．ただし，$n \geq 1$ であり，$f^{(0)}(x) := f(x)$ とする．R_n は**剰余項**と呼ばれる．

問題 1．関連する定理

(1) $n=1$ のとき，テイラーの定理 (1) は**平均値の定理**を表していることを示せ．

（コメント：テイラーの定理は平均値の定理の一般化である．）

(2) テイラーの定理 (1) において，$a=0,\quad b=x$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n \\ R_n &= \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad 0<\theta<1 \end{aligned} \tag{2}$$

が得られることを示せ．

（コメント：式 (2) を**マクローリンの定理**と呼ぶ．）

問題 2．具体例：指数関数

次の手順に従い，$f(x)=e^x$ に関して $n=5$ までマクローリン展開 (2) せよ．

(1) $f^{(k)}(x)$ $(k=1,2,3,4,5)$ を求めよ．

（ヒント：$(e^x)'=e^x$ を必要な回数用いる．）

(2) $f^{(k)}(0)$ $(k=0,1,2,3,4)$ を求めよ．

（ヒント：$f^{(0)}(0) := f(0)$．設問 (1) の答えに $x=0$ を代入する．）

(3) $f^{(5)}(\theta x)$ を求めよ．

（ヒント：設問 (1) で得られた $f^{(5)}(x)$ の x に θx を代入する．）

(4) $f(x)=e^x$ の $n=5$ までのマクローリン展開を完成させよ．

（ヒント：設問 (2) と設問 (3) の結果を式 (2) へ代入する．）

「解析学 Ib」

第7回：テイラーの定理（1）【解答】

関数 $f(x)$ が $(n-1)$ 回微分可能で，$f^{(n-1)}(x)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能とする．そのとき，

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n \\ R_n &= \frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \tag{1}$$

となる θ が存在する（**テイラーの定理**）．ただし，$n \geq 1$ であり，$f^{(0)}(x) := f(x)$ とする．R_n は**剰余項**と呼ばれる．

問題 1．関連する定理

(1) $n=1$ のとき，テイラーの定理 (1) は**平均値の定理**を表していることを示せ．

（コメント：テイラーの定理は平均値の定理の一般化である．）

【解答】　(1) において $n=1$ とおくと

$$f(b) = f(a) + R_1 = f(a) + \frac{f'(a+\theta(b-a))}{1!}(b-a) \tag{2}$$

これは平均値の定理に他ならない．

(2) テイラーの定理 (1) において，$a=0, \quad b=x$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n \\ R_n &= \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \tag{3}$$

が得られることを示せ．

（コメント：式 (3) を**マクローリンの定理**と呼ぶ．）

【解答】　略．

問題 2．具体例：指数関数

次の手順に従い，$f(x) = e^x$ に関して $n=5$ までマクローリン展開 (3) せよ．

(1) $f^{(k)}(x)$ $(k=1,2,3,4,5)$ を求めよ．

（ヒント：$(e^x)' = e^x$ を必要な回数用いる．）

【解答】　$(e^x)' = e^x$ より明らかに

$$f'(x) = f''(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = e^x \tag{4}$$

(2) $f^{(k)}(0)$ $(k=0,1,2,3,4)$ を求めよ．

（ヒント：$f^{(0)}(0) := f(0)$．設問 (1) の答えに $x=0$ を代入する．）

【解答】　$f^{(0)}(0) := f(0)$ に注意して，前問の結果も用いれば

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = e^0 = 1 \tag{5}$$

(3) $f^{(5)}(\theta x)$ を求めよ．

（ヒント：設問 (1) で得られた $f^{(5)}(x)$ の x に θx を代入する．）

【解答】　設問 (1) の結果を用いて

$$f^{(5)}(\theta x) = e^{\theta x} \tag{6}$$

(4) $f(x) = e^x$ の $n = 5$ までのマクローリン展開を完成させよ．

（ヒント：設問 (2) と設問 (3) の結果を式 (3) へ代入する．）

【解答】　上で得られた結果を

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5 \tag{7}$$

へ代入すれば

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{e^{\theta x}}{5!}x^5 \tag{8}$$

「解析学 Ib」

第 8 回：テイラーの定理（2）

関数 $f(x)$ が，点 x と原点 $x=0$ を含む領域で n 回微分可能とする．そのとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n \\ R_n &= \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \tag{1}$$

となる θ が存在する（マクローリンの定理）．

問題 1．具体例：三角関数

次の手順に従い，$f(x) = \sin x$ に関して $n=5$ までマクローリン展開 (1) せよ．

(1) $f^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ を求めよ．

（ヒント：$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ を必要な回数用いる．）

(2) $f^{(k)}(0)$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ を求めよ．

（ヒント：$f^{(0)}(0) := f(0)$．設問 (1) の答えに $x=0$ を代入する．）

(3) $f^{(5)}(\theta x)$ を求めよ．

（ヒント：設問 (1) で得られた $f^{(5)}(x)$ の x に θx を代入する．）

(4) $f(x) = \sin x$ の $n=5$ までのマクローリン展開を完成させよ．

（ヒント：設問 (2) と設問 (3) の結果を式 (1) へ代入する．）

問題 2．具体例：対数関数

次の手順に従い，$f(x) = \ln(1+x)$ に関して $n=5$ までマクローリン展開 (1) せよ．

(1) $f^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ を求めよ．

（ヒント：$(\ln(1+x))' = (1+x)^{-1}$, $((1+x)^{\alpha})' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ を必要な回数用いる．）

(2) $f^{(k)}(0)$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ を求めよ．

（ヒント：$f^{(0)}(0) := f(0)$．設問 (1) の答えに $x=0$ を代入する．）

(3) $f^{(5)}(\theta x)$ を求めよ．

（ヒント：設問 (1) で得られた $f^{(5)}(x)$ の x に θx を代入する．）

(4) $f(x) = \ln(1+x)$ の $n=5$ までのマクローリン展開を完成させよ．

（ヒント：設問 (2) と設問 (3) の結果を式 (1) へ代入する．）

「解析学 Ib」

第8回：テイラーの定理（2）【解答】

関数 $f(x)$ が，点 x と原点 $x=0$ を含む領域で n 回微分可能とする．そのとき，

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$
$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad 0 < \theta < 1 \tag{1}$$

となる θ が存在する（マクローリンの定理）．

問題1．具体例：三角関数

次の手順に従い，$f(x) = \sin x$ に関して $n=5$ までマクローリン展開 (1) せよ．

(1) $f^{(k)}(x)$ $(k=1,2,3,4,5)$ を求めよ．
（ヒント：$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ を必要な回数用いる．）

【解答】

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x \quad f^{(5)}(x) = \cos x \tag{2}$$

(2) $f^{(k)}(0)$ $(k=0,1,2,3,4)$ を求めよ．
（ヒント：$f^{(0)}(0) := f(0)$．設問 (1) の答えに $x=0$ を代入する．）

【解答】　$f^{(0)}(0) := f(0)$ に注意して，前問の結果も用いると

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0 \tag{3}$$

(3) $f^{(5)}(\theta x)$ を求めよ．
（ヒント：設問 (1) で得られた $f^{(5)}(x)$ の x に θx を代入する．）

【解答】　設問 (1) の結果を用いて

$$f^{(5)}(\theta x) = \cos(\theta x) \tag{4}$$

(4) $f(x) = \sin x$ の $n=5$ までのマクローリン展開を完成させよ．
（ヒント：設問 (2) と設問 (3) の結果を式 (1) へ代入する．）

【解答】　上で得られた結果を

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5 \tag{5}$$

へ代入すれば

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{\cos(\theta x)}{5!}x^5 \tag{6}$$

問題2．具体例：対数関数

次の手順に従い，$f(x) = \ln(1+x)$ に関して $n=5$ までマクローリン展開 (1) せよ．

(1) $f^{(k)}(x)$ $(k=1,2,3,4,5)$ を求めよ．
（ヒント：$(\ln(1+x))' = (1+x)^{-1}$, $((1+x)^{\alpha})' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ を必要な回数用いる．）

【解答】

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1+x)^{-2}, \quad f^{(3)}(x) = 2!(1+x)^{-3}, \tag{7}$$

$$f^{(4)}(x) = -3!(1+x)^{-4}, \quad f^{(5)}(x) = 4!(1+x)^{-5} \tag{8}$$

(2) $f^{(k)}(0)$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ を求めよ．

（ヒント：$f^{(0)}(0) := f(0)$．設問 (1) の答えに $x = 0$ を代入する．）

【解答】　$f^{(0)}(0) := f(0)$ に注意して，前問の結果も用いると

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = 2!, \quad f^{(4)}(0) = -3! \tag{9}$$

(3) $f^{(5)}(\theta x)$ を求めよ．

（ヒント：設問 (1) で得られた $f^{(5)}(x)$ の x に θx を代入する．）

【解答】　設問 (1) の結果を用いて

$$f^{(5)}(\theta x) = 4!(1+\theta x)^{-5} \tag{10}$$

(4) $f(x) = \ln(1+x)$ の $n = 5$ までのマクローリン展開を完成させよ．

（ヒント：設問 (2) と設問 (3) の結果を式 (1) へ代入する．）

【解答】　上で得られた結果を

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5 \tag{11}$$

へ代入すれば

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5(1+\theta x)^5}x^5 \tag{12}$$

「解析学 Ib」

第 9 回：ロピタルの定理

問題

ロピタルの定理を用いて、次の極限を調べよ。

(1)

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - 2x - 8} \tag{1}$$

（第 1 回の演習を参照。）

(2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x} \quad (a \neq 0) \tag{2}$$

（第 1 回の演習を参照。）

(3)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} \quad (0 < a \neq 1) \tag{3}$$

（第 1 回の演習を参照。）

(4)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{1 - \cos x} \tag{4}$$

(5)

$$\lim_{x \to +0} x \ln(\sin x) \tag{5}$$

（ヒント：$x \ln(\sin x) = \frac{\ln(\sin x)}{1/x}$ と見なす。）

(6)

$$\lim_{x \to 1-0} x^{1/(1-x)} \tag{6}$$

（ヒント：$y = x^{1/(1-x)}$ とおき、まず $\ln y$ の極限を調べる。）

(7)

$$\lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right) \tag{7}$$

（ヒント：$x \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right) = \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x}{1/x}$ と見なす。）

(8)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} \quad (n \in \mathbf{N}) \tag{8}$$

（ヒント：ロピタルの定理を n 回使う。）

第9回：ロピタルの定理［解答］

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x^2-x-6)'}{(3x^2-2x-8)'}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 2}\frac{4x-1}{6x-2}=\frac{7}{10}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{1}=a$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

$\displaystyle =\frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)]'}{(x)'}=\frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{\ln a}$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}}{\cos x}=4$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to +0}x\ln(\sin x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln(\sin x)}{1/x}=\lim_{x\to +0}\frac{\cos x/\sin x}{-1/x^2}$

$\displaystyle =-\lim_{x\to +0}\frac{x^2}{\tan x}=-\lim_{x\to +0}\frac{2x}{1/\cos^2 x}=0$

(6) $y=x^{1/(1-x)}$ とおくと

$\displaystyle \ln y=\frac{\ln x}{1-x}$

$\displaystyle \therefore \lim_{x\to 1-0}\ln y=\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1-0}\frac{1/x}{-1}=-1$

$\displaystyle \therefore \lim_{x\to 1-0}y=e^{-1}$

(7) $\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x}{1/x}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{-1/1+x^2}{-1/x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{1+x^2}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1/x^2 + 1} = 1$

(8) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x \to \infty} \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{e^x} = 0$

「解析学 Ib」

第 10 回：関数のグラフと不等式の証明

問題 1. 関数のグラフ

与えられた関数の増減と凹凸を調べ、グラフを描け。

(1)

$$f(x) = e^{-x^2} \tag{1}$$

（ヒント：$f'(x) = 0$ および $f''(x) = 0$ となる点を求める。また、$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ も調べ、増減表を描く。）

(2)

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \tag{2}$$

（ヒント：$f'(x) = 0$ および $f''(x) = 0$ となる点を求める。また、$\lim_{x\to+0} f(x)$ および $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ も調べ、増減表を描く。）

(3)

$$f(x) = e^{-x} \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi) \tag{3}$$

（ヒント：$f'(x) = 0$ および $f''(x) = 0$ となる点を求め、増減表を描く。$f'(x)$ は三角関数の合成を用いて $e^{-x}\cos(x+\delta)$ または $e^{-x}\sin(x+\delta)$ (δ は適当な定数) の形にする。）

問題 2. 不等式の証明

与えられた不等式を証明せよ。

(1)

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} > \ln(1+x), \quad (x > 0) \tag{4}$$

（ヒント：$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ とおくと、$f(0) = 0$ および $f'(x) > 0,\ (x > 0)$ であるから $f(x) > 0,\ (x > 0)$）

(2)

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad (x > 0) \tag{5}$$

（ヒント：$f(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})$ とおくと、$f'(0) = 0$ および $f''(x) > 0,\ (x > 0)$ であることより $f'(x) > 0,\ (x > 0)$。さらに、$f(0) = 0$ より $f(x) > 0,\ (x > 0)$。）

第10回：関数のグラフと不等式の証明【解答】

問題1

(1) $f(x) = e^{-x^2}$ ——— ①

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ ——— ②

$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

$= 4e^{-x^2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$

$= 4e^{-x^2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ——— ③

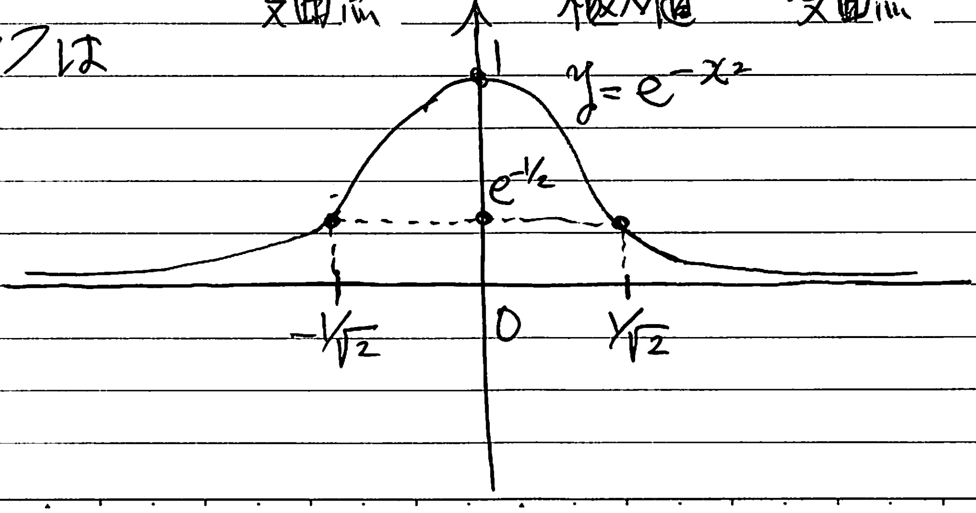
② より $f'(x) = 0$ となる x は $x = 0$ ——— ④

③ より $f''(x) = 0$ 〃 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ——— ⑤

以上を考慮して $f(x)$ の増減凹凸は次のようになる

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		∞
f'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	0	↗	$e^{-\frac{1}{2}}$	↗	1	↘	$e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0
			変曲点		極大値		変曲点		

よってグラフは



(2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ —— ①

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ —— ②

$f''(x) = \dfrac{1}{x^4}\left[-\dfrac{1}{x} \cdot x^2 - (1-\ln x) \cdot 2x\right]$

$= \dfrac{1}{x^3}\left[-1-2(1-\ln x)\right]$

$= -\dfrac{1}{x^3}(3-2\ln x)$ —— ③

② より $f'=0$ となるのは $x=e$ —— ④

③ より $f''=0$ となるのは $x=e^{3/2}$ —— ⑤

また

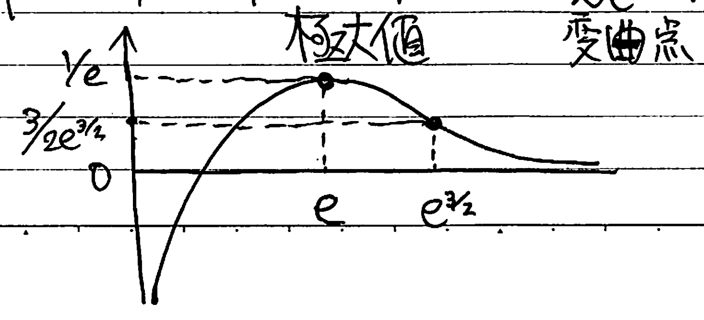
$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ —— ⑥

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$ —— ⑦

以上より $f(x)$ の増減・凹凸は次のようになる

x	$+0$		e		$e^{3/2}$		∞
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	$\dfrac{3}{2e^{3/2}}$	↘	0

よってグラフは



(3) $f(x) = e^{-x}\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ ——— ①

$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$

$= \sqrt{2}\, e^{-x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\, e^{-x}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\, e^{-x}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ——— ②

$f''(x) = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$

$= -2e^{-x}\cos x$ ——— ③

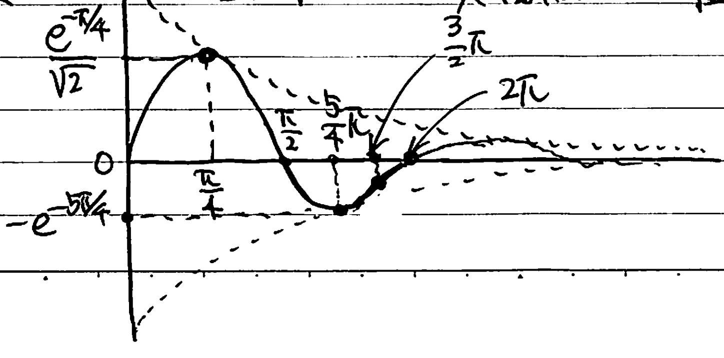
② より $f' = 0$ となるのは $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ ～ ④

③ より $f'' = 0$ となるのは $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ ～ ⑤

以上を考慮して $f(x)$ の増減・凹凸は次のようになる。

x	0		$\frac{1}{4}\pi$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5}{4}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		2π
f'	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	+
f''	−	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−
f	0	↗	$\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$	↘	0	↘	$-e^{-5\pi/4}$	↗	$-e^{-3\pi/2}$	↗	0
			極大値		変曲点		極小値		変曲点		

よってグラフは



問題2

(1) $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ とおく ——— ①

$f'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x}$

$= \frac{1}{1+x}\left[(1-x+x^2)(1+x) - 1\right]$

$= \frac{x^3}{1+x}$ ——— ②

① より $f(0) = 0$ ——— ③

② より $f'(x) > 0 \quad (x > 0)$ ——— ④

③④ より $f(x) > 0 \quad (x > 0)$ //

(2) $f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ ——— ①

$f'(x) = e^x - (1 + x)$ ——— ②

$f''(x) = e^x - 1$ ——— ③

② より $f'(0) = 0$ ——— ④

③ より $f''(x) > 0 \quad (x > 0)$ ——— ⑤

④⑤ より $f'(x) > 0 \quad (x > 0)$ ——— ⑥

① より $f(0) = 0$ ——— ⑦

⑥⑦ より $f(x) > 0 \quad (x > 0)$ //

「解析学 Ib」

第 11 回：定積分

問題 1. 定義

関数 $f(x)$ の区間 $[a,b]$ における定積分は，次のような無限級数（**リーマン和**）として書くことができる．

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} \tag{1}$$

以下の設問に答えよ．

(1) 式 (1) の意味を説明せよ。

(2) $a=0,\ b=1$ のとき，式 (1) は次のように書けることを確かめよ．

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \tag{2}$$

(3) リーマン和を計算することにより，定積分 $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ を求めよ．

（ヒント：式 (2) において $f(x)=x$ とおく．和の公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ を用いる．）

(4) リーマン和を計算することにより，定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ を求めよ．

（ヒント：式 (2) において $f(x)=x^2$ とおく．和の公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を用いる．）

問題 2．応用

(1) 次の無限級数を計算せよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}} \tag{3}$$

（ヒント：$\dfrac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}} = \dfrac{(k/n)}{\sqrt{1+(k/n)^2}}\cdot\dfrac{1}{n} = f\left(\dfrac{k}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{n}$ となるような関数 $f(x)$ を見出す．式 (2) を用いる．$(\sqrt{1+x^2})' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を用いる．）

(2) 次の無限級数を計算せよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \tag{4}$$

（ヒント：$\dfrac{n}{n^2+k^2} = \dfrac{1}{1+(k/n)^2}\cdot\dfrac{1}{n} = f\left(\dfrac{k}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{n}$ となるような関数 $f(x)$ を見出す．式 (2) および $(\tan^{-1}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ を用いる．）

「解析学 Ib」

第 11 回：定積分　【解答】

問題 1．定義

関数 $f(x)$ の区間 $[a,b]$ における定積分は，次のような無限級数（**リーマン和**）として書くことができる．

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} \tag{1}$$

以下の設問に答えよ．

(1) 式 (1) の意味を説明せよ。

【解答】　図 1 を参照。

(2) $a=0,\ b=1$ のとき，式 (1) は次のように書けることを確かめよ．

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \tag{2}$$

【解答】　略．

(3) リーマン和を計算することにより，定積分 $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ を求めよ．

（ヒント：式 (2) において $f(x)=x$ とおく．和の公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ を用いる.）

【解答】

$$\int_0^1 xdx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(1+\frac{1}{n})}{2} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

(4) リーマン和を計算することにより，定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ を求めよ．

（ヒント：式 (2) において $f(x)=x^2$ とおく．和の公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を用いる.）

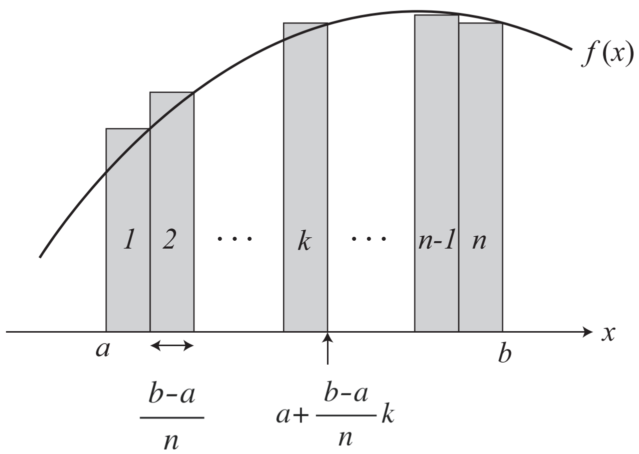


図 1 ：リーマン和.

【解答】

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3} \tag{4}$$

問題 2. 応用

(1) 次の無限級数を計算せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}} \tag{5}$$

（ヒント：$\dfrac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}} = \dfrac{(k/n)}{\sqrt{1+(k/n)^2}}\cdot\dfrac{1}{n} = f\left(\dfrac{k}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{n}$ となるような関数 $f(x)$ を見出す．式 (2) を用いる．$(\sqrt{1+x^2})' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を用いる．）

【解答】

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k/n)}{\sqrt{1+(k/n)^2}}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ &= \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1\end{aligned} \tag{6}$$

(2) 次の無限級数を計算せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \tag{7}$$

（ヒント：$\dfrac{n}{n^2+k^2} = \dfrac{1}{1+(k/n)^2}\cdot\dfrac{1}{n} = f\left(\dfrac{k}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{n}$ となるような関数 $f(x)$ を見出す．式 (2) および $(\tan^{-1}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ を用いる．）

【解答】

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \left[\tan^{-1}x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\end{aligned} \tag{8}$$

「解析学 **Ib**」

第 12 回：微積分学の基本定理とその応用

問題 1．微積分学の基本定理

$f(x)$ (≥ 0) を単調増加の連続関数、a を定数とする。区間 $[a, x]$（$a \leq x$）における x 軸と $y = f(x)$ に囲まれた領域の面積は

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1}$$

と表される。これを用いて次の設問に答えよ。

(1) $\Delta S := S(x + \Delta x) - S(x)$（$\Delta x$ は微少量）とする。図を用いて、$\Delta S = f(c)\Delta x$ となる $c \in (x, x + \Delta x)$ が存在することを確かめよ。

(2) 設問 (1) の結果を用いて、$S'(x) = f(x)$ を示せ。

(3) 設問 (2) の結果より、$f(x)$ の任意の原始関数を $F(x)$（つまり $F'(x) = f(x)$）とすると、$S(x) = F(x) + C$（C は定数）の関係にあることがわかる。これを用いて、微分積分学の基本定理

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

を示せ。（ヒント：$S(b) = \int_a^b f(x)dx$ および $S(a) = 0$ であることを用いる。）

問題 2．応用

微積分学の基本定理を用いて、次の定積分を計算せよ。

(1)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \tag{3}$$

（ヒント：合成関数の微分法より $\{(x+1)^{1/2}\}' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(x^2+1)'$）

(2)

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \tag{4}$$

（ヒント：合成関数の微分法より $\{\ln f(x)\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$）

(3)

$$\int_0^{\pi/4} \tan x dx \tag{5}$$

（ヒント：$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$）

(4)

$$\int_0^{\pi/4} \cos(2x)dx \tag{6}$$

（合成関数の微分法より $\{\sin(2x)\}' = (2x)'\cos(2x)$）

(5)

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx \tag{7}$$

（ヒント：合成関数の微分法より $(e^{-x^2})' = (-x^2)'e^{-x^2}$）

(6)

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx \tag{8}$$

（ヒント：第 4 回演習を参照。）

(7)

$$\int_3^4 \frac{1}{x^2-4}dx \tag{9}$$

（ヒント：第 4 回演習を参照。）

(8)

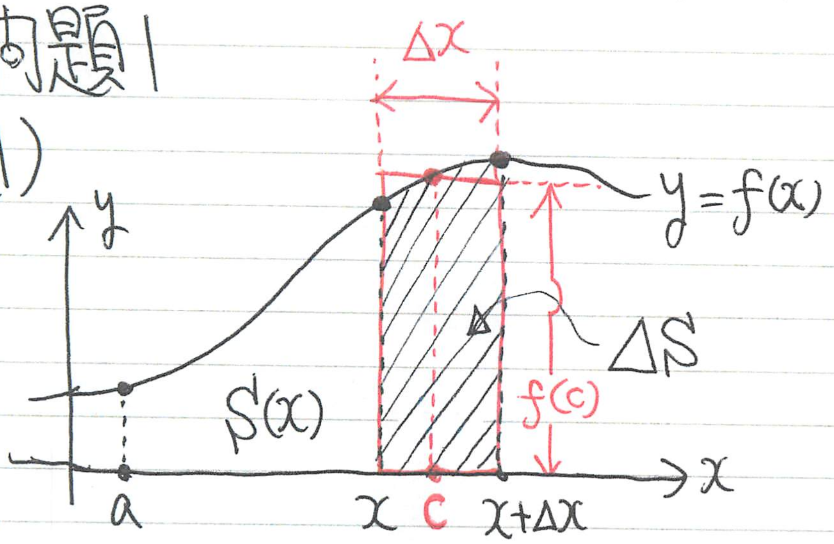
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \tag{10}$$

（ヒント：第 4 回演習を参照。）

第12回：微積分学の基本定理とその応用［解答］

問題1

(1)



上図の斜線部分の面積がΔS。

明らかに　$f(x)\Delta x < \Delta S < f(x+\Delta x)\Delta x$

であるが，$f(x)$は連続であるから

$$\Delta S = f(c)\Delta x \quad \text{①}$$

となる　$c \in (x, x+\Delta x)$ が存在する

(2) ①より

$$\frac{dS}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x) \quad \text{②}$$

(3) $S(a) = F(a) + C = 0$ より $C = -F(a)$ ～③

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(b)$$
$$= F(b) + C$$
$$= F(b) - F(a) \quad (\because \text{③})$$

(1)

$$\left\{(x^2+1)^{1/2}\right\}' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x$$
$$= x/\sqrt{x^2+1}$$
$$\therefore \int_0^1 x/\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \left\{(x^2+1)^{1/2}\right\}' dx$$
$$= \left[(x^2+1)^{1/2}\right]_0^1$$
$$= \sqrt{2}-1$$

(2) $\left\{\ln(x^2+1)\right\}' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$$\therefore \frac{x}{x^2+1} = \left\{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right\}'$$
$$\therefore \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left\{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right\}' dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

(3) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \{-\ln(\cos x)\}'$

$$\therefore \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = \int_0^{\pi/4} \{-\ln(\cos x)\}' dx$$
$$= -\Big[\ln(\cos x)\Big]_0^{\pi/4}$$
$$= -\left\{\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) - \ln(\cos 0)\right\}$$
$$= -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = -\ln 2^{-1/2} = \frac{1}{2}\ln 2$$

(4) $\{\sin(2x)\}' = (2x)'\cos(2x) = 2\cos(2x)$

$$\therefore \cos(2x) = \left\{\frac{1}{2}\sin(2x)\right\}'$$
$$\therefore \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\, dx = \int_0^{\pi/4}\left\{\frac{1}{2}\sin(2x)\right\}' dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{2}$$

(5) $(e^{-x^2})' = (-x^2)' e^{-x^2} = -2x e^{-x^2}$

$$\therefore x e^{-x^2} = \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)'$$
$$\therefore \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)' dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{2}(e^{-1} - e^0) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

(6) $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{x^2+2^2}\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$

$= \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}$

$\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{x^2+a^2}$

(7) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-4}\,dx = \int_3^4 \frac{1}{x^2-2^2}\,dx$

$= \left[\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_3^4$

$= \frac{1}{4}\left(\ln\frac{2}{6} - \ln\frac{1}{5}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{1}{5}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\ln 3^{-1} - \ln 5^{-1}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(-\ln 3 + \ln 5\right)$

$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \frac{1}{x^2-a^2}$

(8) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}$

$= \left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1$

$= \sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1}0$

$= \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$

$\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

「解析学 Ib」

第 13 回：有理関数の積分と部分積分

$f(x)$ の原始関数および不定積分 $\int_a^x f(x)dx$ を $\int f(x)dx$ と記す。

問題 1. 有理関数の積分

次の積分を計算せよ。

(1)

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx \tag{1}$$

（ヒント：$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ と部分分数分解する。）

(2)

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx \tag{2}$$

（ヒント：$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ と部分分数分解する。）

問題 2. 部分積分

次の設問に答えよ。ただし、設問 (2) 以降は与えられた積分を求めよ。

(1) 部分積分の公式

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \tag{3}$$

を証明せよ.（ヒント：積の微分公式 $(fg)' = f'g + fg'$ の両辺を積分する. ）

(2)

$$\int x \sin x dx \tag{4}$$

（ヒント：公式 (3) において、$f'(x) = \sin x,\ g(x) = x$ と見なす。）

(3)

$$\int x^2 \sin x\ dx \tag{5}$$

（ヒント：部分積分を 2 度用いる．1 度目は公式 (3) において，$f'(x) = \sin x,\ g(x) = x^2$ と見なす.）

(4)

$$\int \ln x dx \tag{6}$$

（ヒント：$\ln x = 1 \cdot \ln x = x' \cdot \ln x$ と見なす。）

(5)

$$\int x^n \ln x dx \quad (-1 \neq n \in \mathbf{N}) \tag{7}$$

（ヒント：公式 (3) において、$f'(x) = x^n,\ g(x) = \ln x$ と見なす。）

(6)

$$\int x e^{ax} dx \quad (0 \neq a \in \mathbf{R}) \tag{8}$$

（ヒント：公式 (3) において、$f'(x) = e^{ax},\ g(x) = x$ と見なす。）

(7)

$$\int \sin^{-1} x dx \tag{9}$$

（ヒント：$\sin^{-1} x = 1 \cdot \sin^{-1} x = x' \cdot \sin^{-1} x$ と見なす。$(\sin^{-1} \frac{x}{a})' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ を用いる。）

第13回：有理関数の積分と部分積分［解答］

問題1

(1) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$ とおくと ― ①

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$
$$= (A+B)x + (A-B)$$

$\therefore \begin{cases} A+B=0 & \text{―} ② \\ A-B=1 & \text{―} ③ \end{cases}$

②③より $A = -B = \dfrac{1}{2}$ ― ④

①④より

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

(2) $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$ ～ ①

$\Rightarrow \quad x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$
$$= A(x^2+2x+1) + B(x^2-1) + C(x-1)$$
$$= (A+B)x^2 + (2A+C)x + (A-B-C)$$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=1 \\ A-B-C=0 \end{cases} \Rightarrow A = -B = \dfrac{1}{4},\ C = \dfrac{1}{2}$ ～ ②

①②より $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx = \int\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

$= \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}$

問題2

(1) $(fg)' = f'g + fg'$

$\therefore \quad f'g = (fg)' - fg'$

$\therefore \quad \int f'g\,dx = \int (fg)'dx - \int fg'\,dx$

$= fg' - \int fg'\,dx$

(2) $\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{\sin x}_{f'} = \int \underbrace{(-\cos x)'}_{f}\cdot\underbrace{x}_{g}\,dx$

$= \underbrace{-\cos x}_{f}\cdot\underbrace{x}_{g} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{f}\cdot\underbrace{1}_{g'}\,dx$

$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$

$= -x\cos x + \sin x$

(3) $\int \underbrace{x^2}_{g}\underbrace{\sin x}_{f'}\,dx = \int \underbrace{(-\cos x)'}_{f}\cdot\underbrace{x^2}_{g}\,dx$

$= \underbrace{-\cos x}_{f}\cdot\underbrace{x^2}_{g} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{f}\cdot\underbrace{2x}_{g'}\,dx$

$= -x^2\cos x + 2\int \underbrace{\cos x}_{f'}\cdot\underbrace{x}_{g}\,dx$

$= -x^2\cos x + 2\left[\underbrace{\sin x}_{f}\cdot\underbrace{x}_{g} - \int \underbrace{\sin x}_{f}\cdot\underbrace{1}_{g'}\,dx\right]$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$

(4) $\displaystyle\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = \int \underbrace{x'}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} \, dx$

$\displaystyle= \underbrace{x}_{f} \underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \, dx = x \ln x - \int dx$

$= x \ln x - x$

(5) $\displaystyle\int x^n \ln x \, dx = \int \Bigl(\underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{f}\Bigr)' \underbrace{\ln x}_{g} \, dx$

$\displaystyle= \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{f} \underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \, dx$

$\displaystyle= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx$

$\displaystyle= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$

(6) $\displaystyle\int x e^{ax} \, dx = \int \Bigl(\underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{f}\Bigr)' \cdot \underbrace{x}_{g} \, dx$

$\displaystyle= \underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{f} \cdot \underbrace{x}_{g} - \int \underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'} \, dx$

$\displaystyle= \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax}$

(17) $\int \sin^{-1}x\,dx = \int 1\cdot\sin^{-1}x\,dx = \int x'\cdot\sin^{-1}x\,dx$

$= x\sin^{-1}x - \int x(\sin^{-1}x)'\,dx$

$= x\sin^{-1}x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

ここで $\left\{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}' = \dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ より

$= x\sin^{-1}x - \int\left\{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}'dx$

$= x\sin^{-1}x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

「解析学 Ib」

第 14 回：置換積分

問題 1. 三角関数

次の設問に答えよ。ただし、積分が与えられた場合は、その積分を求めよ。

(1)

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx \tag{1}$$

（ヒント：第 4 回演習を参照。$x = a\tan\theta$ と置換する。）

(2)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \tag{2}$$

（ヒント：第 4 回演習を参照。$x = a\sin\theta$ $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ と置換する。）

(3)

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx \tag{3}$$

（ヒント：第 4 回演習を参照。$x = a\sin\theta$ $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ と置換する。半角の公式 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ を用いる。）

(4) $t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt \tag{4}$$

となることを示せ。
（ヒント：$\cos x = \frac{\cos(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})}{1} = \frac{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})}$ を用いる。$\sin x$ も同様。$(\tan\frac{x}{2})' = (\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}})'$ を用いる。）

(5) 設問 (4) における置換を用いて、次の積分を求めよ。

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx \tag{5}$$

問題 2. 無理関数・指数関数

次の積分を求めよ。

(1)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}dx \tag{6}$$

（ヒント：$t=\sqrt{1-x}$ と置換する。$\int \frac{1}{t^2-1}dt$ は第 4 回演習を参照。）

(2)

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx \tag{7}$$

（ヒント：$t=\sqrt[4]{x}$ と置換する。$\frac{t^4}{t^2+1}=\frac{(t^2+1)(t^2-1)+1}{t^2+1}$ と変形する。$\int \frac{1}{1+t^2}dt$ は第 4 回演習を参照。）

(3)

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx \tag{8}$$

（ヒント：$t=e^x$ と置換する。$\int \frac{1}{1+t^2}dt$ は第 4 回演習を参照。）

(4)

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx \tag{9}$$

（ヒント：$t=\ln x$ と置換する。）

第14回：置換積分［解答］

問題1

(1) $x = a\tan\theta$ とおくと $dx = \dfrac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

$$\therefore \int \frac{a}{a^2(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

(2) $x = a\sin\theta$ とおくと $dx = a\cos\theta\, d\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}} = \int\frac{a\cos\theta}{a|\cos\theta|}d\theta = \int d\theta$$

$$= \theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

(3) $x = a\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$dx = a\cos\theta\, d\theta$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\cdot a\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int\sqrt{a^2\cos^2\theta}\cdot a\cos\theta\, d\theta = a^2\int\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}+\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)$$

(4) $\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}$

$= \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin x = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$

$= \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$dt = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x/2}{\cos x/2}\right)dx = \dfrac{\frac{1}{2}\cos^2(x/2)+\frac{1}{2}\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}dx$

$= \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx = \dfrac{1+t^2}{2}dx$

$\therefore dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt.$

(5) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx$

$$= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{(1+t^2)+2t}{2t[(1+t^2)-(1-t^2)]}\cdot 2\,dt$$

$$= \int \frac{1+2t+t^2}{t\cdot 2}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+2+t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|t| + 2t + \frac{1}{2}t^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}$$

問題2

(1) $t=\sqrt{1-x}$ とおくと $x=1-t^2,\ dx=-2t\,dt$

$$\therefore \int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{1}{(1-t^2)t}\cdot(-2t\,dt)$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2-1}\,dt = 2\cdot\frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

(2) $t = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ とおくと $x = t^4,\ dx = 4t^3 dt$

$$\therefore \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{t}{1+t^2}\cdot 4t^3 dt = 4\int \frac{t^4}{1+t^2}dt$$

$$= -4\int \frac{(1-t^4)-1}{1+t^2}dt = -4\int \frac{(1-t^2)(1+t^2)-1}{1+t^2}dt$$

$$= -4\int \left\{1-t^2-\frac{1}{1+t^2}\right\}dt$$

$$= -4\left(t-\frac{1}{3}t^3-\tan^{-1}t\right)$$

$$= -4x^{1/4}+\frac{4}{3}x^{3/4}+4\tan^{-1}x^{1/4}$$

(3) $t = e^x$ とおくと $x = \ln t,\ dx = t^{-1}dt$

$$\therefore \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{1}{t+t^{-1}}\cdot t^{-1}dt = \int \frac{1}{t^2+1}dt$$

$$= \tan^{-1}t = \tan^{-1}e^x$$

(4) $t = \ln x$ とおくと $x = e^t,\ dx = e^t dt = x\,dt$

$$\therefore \int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int \frac{t^2}{x}\cdot x\,dt = \int t^2 dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3$$